

UTILIZZO DELLO STRUT AND TIE MODEL PER LA PROGETTAZIONE DI PARTICOLARI COSTRUTTIVI DELLE STRUTTURE IN C.A.

Giuseppe Carlo MARANO

*Dipartimento di Scienze dell'Ingegneria Civile e dell'Architettura
Politecnico di Bari
e-mail: g.marano@poliba.it*

Fabrizio PALMISANO

Professionista Studio Vitone & Associati

Amedeo VITONE

*Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale
Politecnico di Bari*

Parole chiave: concrete structure, strut-and-tie, optimal design, energy

Abstract.

In the structural analysis of concrete elements, whose solution is not always easy, is getting used more and more the Load Path Method (STM) in research and in structural planning. It allows fast and general application. Such instrument of analysis allows to obtain one moreover synthetic and effective interpretation of the structural behavior, turning out therefore important aid in the preliminary phases of the structural planning (definition of shapes and disposition of steel). Essential point for the effective application of this method is the geometric definition of model describing the structural element condition. Its location not always turns out immediately. In the present memory a simple example of STM is described for design perforations in compressed concrete slabs, in the Auditorium of Rome.

Sommario.

Nell'analisi e nella progettazione delle strutture in c.a. si pone il problema della conoscenza dello stato tensionale la cui soluzione non è sempre agevolmente perseguibile. Per questo è sempre più utilizzato, sia nella ricerca che nella progettazione strutturale il metodo STM, che a fronte di una perdita di precisione nei risultati permette una interno degli elementi. Per la soluzione di questo non sempre facile problema viene sempre più frequentemente utilizzato, sia nella ricerca che nella progettazione, il metodo Stru and Tie (STM) il quale, a fronte di una perdita di precisione nei risultati permette d'altro canto una applicazione rapida e soprattutto di validità generale. Questo strumento di analisi permette di ottenere, peraltro un'interpretazione sintetica ed efficace riguardo al comportamento strutturale, risultando così un ausilio importante nelle fasi preliminari della progettazione

strutturale (definizione delle forme e quindi disposizione delle armature). Il punto cruciale per la efficace applicazione di tale metodo è rappresentato dalla definizione geometrica del traliccio atto a descrivere l'elemento strutturale oggetto di indagine. La sua individuazione non sempre risulta immediata o comunque univoca. Nella letteratura scientifica si trovano diversi metodi per l'individuazione dei tralicci. Non sempre questi metodi, comunque validi ed efficaci, sono applicabili nelle reali progettazioni sia per l'elevato costo computazionale che per l'irrealizzabilità nella pratica costruttiva delle disposizioni delle armature derivante dalla loro diretta applicazione. Nella presente memoria si descrive un esempio di semplice utilizzo del modello STM per la progettazione di forature in setti compressi di cemento armato nell'Auditorium di Roma. In particolare, la definizione geometrica del traliccio viene effettuata minimizzando l'energia elastica di deformazione in una classe di schemi base. Sulla scorta di questa modellazione sono state disposte e dimensionate le armature in maniera da prevenire oltre alla crisi dell'elemento strutturale anche l'insorgere di quadri fessurativi del calcestruzzo.

1. Introduzione

La scelta del modello in base al quale analizzare il comportamento di una struttura è governata da criteri che mirano a conciliare la esigenza di pervenire a valutazioni il più possibile precise, con quella di rendere l'impegno, e quindi il costo dell'analisi, proporzionati al fine che si intende conseguire. Un modello, dunque, capace di simulare il reale comportamento della struttura con sufficiente precisione, e tuttavia di agile impiego, sia in fase di assegnazione dei dati, sia in fase di lettura dei risultati. Un modello che non si presti tuttavia solo - a posteriori - a dotarci di uno strumento di verifica numerica, ma che funga anche, se non soprattutto, da guida per il progetto. Allo STM si può in effetti riconoscere il pregio di restituire con immediatezza alla articolazione della geometria di un corpo la espressione sintetica della sua funzione strutturale.

Risalgono al 1899 i primi lavori di W. Ritter, il quale proponeva un semplice modello a traliccio per simulare il comportamento di travi in cemento armato fessurate. Subito dopo E. Morsch ne tentava una prima organica applicazione al progetto delle travi in c.a. Si deve tuttavia riconoscere principalmente a F. Leonhardt il merito di avere - molti decenni dopo - riaperto l'interesse della ricerca e di avere aperto definitivamente prospettive che andavano ben oltre il soddisfacimento delle pressanti esigenze imprenditoriali dei primi costruttori in cemento armato agli inizi del XX secolo.

Se si cercano le radici teoriche del metodo, si finisce con il risalire al 1870 e con il riconoscere allo STM la medesima genesi variazionale ^[1], di tipo energetico ^[2], dei metodi dell'equivalenza ^[3] e degli elementi finiti ^[4].

Fra gli obiettivi principali, ai quali deve ispirarsi la scelta del modello, rientra dunque quello di dotarsi di un efficace strumento per un appropriato ed accurato "disegno" delle armature. Infatti non solo il loro dimensionamento, ma anche le disposizioni relative alla loro organizzazione ed ai dettagli costruttivi finiscono con l'assumere una decisiva influenza su tutti gli aspetti ai quali si riconduce il "comportamento" di una struttura in c.a.: resistenza e duttilità, funzionalità, durabilità, estetica, ed economia.

- *Resistenza e duttilità* - Rilevante ed articolata è l'incidenza che le disposizioni costruttive delle armature hanno sulla resistenza strutturale.
 - In primo luogo sulla resistenza locale (allo S.L.U. per assemblaggio). Questa infatti può essere assicurata anche semplicemente attraverso la adozione di misure progettuali cautelative, riguardanti il disegno dell'armatura: particolari

dei nodi; ancoraggi; organizzazione geometrica delle aste. Se si assimila la trave ad un traliccio (alla Ritter-Mörsch) la verifica della corretta organizzazione interna dell'armatura deve consistere innanzi tutto in un controllo di equilibrio del modello: corretto assemblaggio nei nodi; possibilità di una soluzione equilibrata con nodi cerniera (aste soggette a solo sforzo normale). La verifica deve poi estendersi al controllo di compatibilità che si risolve principalmente in una verifica della congruenza fra la inclinazione delle aste e l'effettivo andamento delle isostatiche di trazione e compressione nello stato I, non fessurato.

- In secondo luogo sulla duttilità. E' infatti possibile esaltare la capacità che ha una struttura di dare fondo a tutte le proprie risorse di resistenza, prima di pervenire al collasso, anche semplicemente mediante appropriati accorgimenti costruttivi. La attitudine ad un comportamento duttile si manifesta innanzi tutto all'atto della prima fessurazione, quando la capacità di mobilitare la resistenza a trazione delle armature è di vitale importanza, perché l'elemento strutturale sopravviva al cedimento del calcestruzzo teso. Successivamente la duttilità si manifesta attraverso la capacità di ricercare configurazioni deformate di equilibrio sempre più avanzate, man mano che aumenta il livello dello stato di sollecitazione. Nel primo caso sono necessarie prescrizioni sui minimi quantitativi di armatura. Nel secondo caso sono necessarie disposizioni più articolate e accurate, che garantiscano la possibilità di formazione di quadri fessurativi evolutivi e sufficientemente diffusi, perché la struttura possa subire rilevanti deformazioni prima del collasso.
- Infine sulla resistenza oltre lo S.L.U.. Si fa riferimento, in particolare, alla resistenza alle azioni accidentali di straordinaria entità; al fuoco; al collasso a catena. Anche per questo particolare aspetto del comportamento della struttura, che pure rientra nel più generale quadro della resistenza, il contributo di un appropriato disegno delle armature può risultare decisivo.
- Appropriati provvedimenti riguardanti le disposizioni costruttive delle armature si dimostrano inoltre efficaci per assicurare che il grado di sicurezza, controllato attraverso formulazioni analitiche che tengano conto della presenza della sola sollecitazione di taglio, non risulti ridotto se contemporaneamente agisce un momento flettente od uno sforzo normale. In effetti la verifica di resistenza di un elemento soggetto contemporaneamente a flessione e taglio andrebbe di regola affrontato avendo cura di esaminare l'influenza reciproca delle sollecitazioni M e V, allo stato limite ultimo.
- *Funzionalità* - La verifica delle condizioni di funzionalità deve condursi allo stato limite di esercizio. La disposizione delle armature ha una influenza significativa sulla deformabilità, proprio perché da essa dipende in misura rilevante il quadro fessurativo, che a sua volta incide sulla rigidezza della struttura.
- *Durabilità* - Distanza fra le barre; scelta dei diametri; disposizione nella sezione trasversale; disegno longitudinale; diametri dei mandrini per la piegatura; copriferri; ecc. Molti degli accorgimenti costruttivi relativi alla disposizione delle armature hanno diretta influenza sulla modalità di sviluppo delle fessure e di conseguenza sul grado di esposizione delle armature alla aggressione da parte degli agenti esterni.

- *Estetica* - Nelle strutture “a faccia vista” è possibile evitare l’insorgere di indesiderate fessure attuando semplici accorgimenti costruttivi quali, ad esempio, una adeguata distribuzione delle armature di superficie.
- *Economia* - La incidenza del “disegno” dei particolari costruttivi delle armature sul costo di costruzione della struttura va ricercata principalmente nei seguenti aspetti:
 - ❑ la riduzione dei costi di manutenzione ordinaria e straordinaria;
 - ❑ la “industrializzazione” della lavorazione e del montaggio delle barre;
 - ❑ la riduzione del peso complessivo di armatura conseguente ad un migliore sfruttamento delle risorse di resistenza della struttura.

Con riguardo a quest’ultimo punto va rilevato che le normative tecniche sono oggi orientate proprio nel senso di “compensare” gli oneri conseguenti a speciali provvedimenti costruttivi dei dettagli di armatura, con correlative riduzioni dei coefficienti di sicurezza, da applicare alle azioni e/o alle resistenze meccaniche dei materiali.

Un esempio significativo è costituito dalla possibilità di adottare azioni orizzontali, simulanti il sisma, di entità variabile in funzione del grado di duttilità adottato, il quale a sua volta dipende in gran parte dalla severità delle prescrizioni sui dettagli costruttivi delle armature.

Una delle prime tecniche adottate per definire i tralicci da utilizzare nell’STM è stata proposta da Harris e Fardis^[21]. Dopo aver analizzato con FE la struttura (supposta isotropa ed elastica) si individuano le zone maggiormente sollecitate, si raggruppano in classi e ciascuna avente all’incirca la stessa direzione della tensione principale. Queste classi permettono di individuare le aste del traliccio. Una soluzione alternativa a questa, ma basata su presupposti simili è quella sviluppata da Angotti e Spinelli^[12] in cui le linee di displuvio della mappatura delle tensioni (ottenuta sempre con FEM) permettono di derivare il modello del traliccio. Una procedura euristica per la definizione automatica del modello ST è stata successivamente proposta da Antonelli e Spinelli^[20]. Un interessante approccio basato su tecniche di ottimizzazione è stato proposto da Biondini Bontempi e Malerba^[10-11], in cui si genera dapprima un reticolo di punti mutuamente connessi tramite bielle e successivamente si cerca quello caratterizzato dalla massima rigidezza. Recentemente sono stati sviluppati metodi basati su criteri di ottimizzazione topologica (OT) con procedimenti che permettono la definizione ed il calcolo degli elementi componenti il traliccio.

2. Applicazione dell’STM nella progettazione strutturale

La analisi delle tensioni e delle deformazioni in tutti i punti della sezione di un elemento strutturale è notevolmente semplificata se si adottano le ipotesi di Bernoulli, tanto da permettere, con limitato impegno, di acquisire una conoscenza anche molto accurata del comportamento nelle regioni in cui l’elemento è effettivamente conforme alle suddette ipotesi (“Regioni B” : “Beam, Bending, Bernoulli”).

Il modello di Bernoulli non è tuttavia applicabile alle “regioni di discontinuità” (“Regioni D” : “Discontinuity, Disturbance, Detail”), identificabili come quelle in cui il comportamento dell’elemento strutturale è caratterizzato da una “discontinuità”, per effetto di singolarità locali geometriche o statiche.

Del resto la ricerca di un altro modello, più versatile di quello di Bernoulli, capace di simulare il comportamento dell’elemento strutturale non solo nelle regioni B, ma anche in quelle D, per molto tempo non è stata alimentata da un grande interesse scientifico. Ciò malgrado sin dalla fine del secolo scorso Ritter e Morsch propossero modelli di analisi già orientati in questa direzione.

Le ragioni del successo del modello di Bernoulli sono varie. In primo luogo esso esercita il fascino del rigore matematico della procedura, e vanta - proprio perché ampiamente collaudato nel tempo - una definitiva verifica di attendibilità in un ampio ambito di tipologie strutturali.

Un'altra ragione sta nel fatto che la inadeguatezza del modello nelle regioni D non era ritenuta una circostanza rilevante, in quanto per lungo tempo non si è attribuita grande importanza alla accuratezza dell'analisi delle regioni D, che pertanto veniva affidata prevalentemente a criteri empirici.

Solo negli ultimi anni si è potuto, invece, definitivamente accertare la grande influenza che la corretta progettazione delle regioni di discontinuità ha sul comportamento (non solo allo stato limite ultimo) degli organismi strutturali, anche quando esse sono localizzate, e di limitata estensione, come nei "nodi" trave-pilastro, o calcestruzzo - barre di armatura.

D'altra parte la presenza di tali "nodi" è così diffusa anche negli organismi costituiti da travi prevalentemente assimilabili a regioni "Beam", da giustificare ampiamente un orientamento della ricerca verso un unico modello, che consenta di analizzare le strutture con un grado di attendibilità uniforme per tutte le regioni, indipendentemente dalla singolarità locale della geometria e della condizione di carico.

Alcuni recenti criteri di ottimizzazione strutturale ^[13-20] hanno permesso di sviluppare una classe di metodi per la definizione del miglior traliccio atto a descrivere un elemento strutturale assegnati che siano le geometrie ed i carichi agenti. Questi metodi rappresentano uno strumento di indagine di grande interesse e potenzialità, con sicure prospettive in campo applicativo e speculative. Questi metodi, integrati con metodi FEA, cercano di ottenere la descrizione del traliccio migliore per la descrizione dei modelli strutturali attraverso la costruzione automatica o semiautomatica, all'interno della struttura continua oggetto di studio, dei modelli Strut-and-Tie. Il criterio ispiratore di questi metodi è generalmente basato sulla ricerca di un traliccio all'interno di un solido continuo ottenuto rimuovendo da questo gradualmente il materiale inefficiente o inutilizzato dal punto di vista strutturale (tensionale o energetico). E' possibile pervenire ad una struttura finale di minimo peso e/o massima rigidità, la cui forma non è altro che un traliccio staticamente determinato. Non sempre però questi tralici sono direttamente utilizzabili prevedendo disposizioni di armature inaccettabili per una struttura ordinaria. Non bisogna infatti dimenticare che il modello a traliccio calcolato automaticamente non è che una semplice schematizzazione geometrica dei campi di linee di forza interni alla struttura, che non tiene conto di tutti quei criteri pratici ed empirici fondamentali per una corretta progettazione dei particolari di dettaglio, di cui solo l'ingegnere è esperto.

Tutti i metodi di ottimizzazione strutturale esposti, sono stati sviluppati al fine di ricercare il traliccio staticamente rappresentativo del comportamento strutturale di un generico elemento continuo soggetto ad assegnate condizioni di carico e di vincolo.

L'individuazione del traliccio equivalente d'altra parte riveste una notevole importanza non solo teorica ma anche progettuale. Innanzi tutto esso offre una visione sintetica generale, sia della geometria di insieme, sia della organizzazione interna delle aste, che *disegna* il comportamento della struttura. La verifica della struttura deve dunque prendere le mosse proprio da questo controllo della attendibilità del modello, e cioè della sua capacità di simulare il continuo al quale viene assimilato. Un controllo preliminare della *congruenza* che si esprime anche attraverso la compatibilità geometrica della disposizione delle aste, degli angoli di incidenza mutua nei nodi, della armonia fra la loro densità e la intensità delle tensioni interne, della capacità di rappresentare i profili curvilinei mediante poligonali, concentrando sapientemente le variazioni di curvatura nei punti singolari. Ma lo STM è

naturalmente anche un efficace strumento di analisi numerica. Il calcolo delle sollecitazioni è notevolmente agevolato dalla circostanza che anche strutture caratterizzate da alta iperstaticità interna si riducono ad un sistema di modelli semplici sovrapposti, isostatici, analizzabili mediante impiego delle sole equazioni di equilibrio. Infine le verifiche di resistenza. Lo STM non nasconde gli elementi che devono essere oggetto di attenzione in questa delicata fase della progettazione: le aste compresse (il calcestruzzo), le aste tese (le armature), i nodi (gli ancoraggi, le giunzioni, le intersezioni, i punti di sagomatura delle barre, la disposizione a strati, ecc.).

Giova rimarcare che l'impiego dello STM – nonostante la rinuncia alla pretesa di rigore nel rispetto delle condizioni di congruenza – è oggi autorizzato formalmente dai codici internazionali. Nel paragrafo 2.5.3.6.3 dell'Eurocodice 2 ^[7], relativo all'analisi strutturale di lastre e travi parete caricate nel loro piano, si afferma esplicitamente che queste tipiche regioni-D possono essere progettate con l'ausilio di semplici modelli puntone-tirante.

Le procedure di calcolo esaminate in precedenza permettono la ricerca, a volte impegnativa, di questo modello strut-and-tie e quindi sono senza dubbio di valido supporto all'ingegnere soprattutto nella progettazione di strutture complesse sia per geometria che per vincoli e carichi applicati. In questi casi, infatti, accade sovente che le mappature di tensione ottenute eseguendo una analisi FEM non risultino immediatamente utilizzabili dal progettista, e che nel contempo siano di incerto esito i tentativi di disegnare il traliccio senza l'ausilio di software che sviluppino algoritmi mirati alla ottimizzazione del progetto. Lo STM così ottenuto può essere assunto come punto di riferimento per le successive fasi di progettazione, tra cui quella fondamentale che riguarda il dimensionamento, la disposizione ed il disegno delle armature.

È ben noto come il comportamento delle costruzioni in c.a. sia notevolmente influenzato dalla qualità del progetto e della realizzazione dei dettagli costruttivi, principalmente di quelli riguardanti la disposizione delle barre dell'armatura.

Da quanto precede emerge che la ricerca dello STM da adottare per il progetto è una operazione complessa, che si può correttamente risolvere solo con la integrazione di svariate esigenze, teoriche ma anche costruttive. Così se da un lato la disposizione delle aste tese non può non preferirsi se aderente ai prevedibili profili dei flussi interni di trazione, d'altro canto essa deve rispondere ad esigenze di lavorazione e di montaggio, particolarmente dei nodi e dei dettagli in genere. Le regole pratiche del cantiere, tuttavia, non devono diventare un alibi per giustificare il sacrificio dei principi della statica: al contrario possono assumere il ruolo di obiettivi ai quali ispirare la scelta del modello. Ed il modello può a sua volta superare il ruolo di fedele simulatore della realtà del continuo, per diventare uno mezzo capace di prefigurare un comportamento verso il quale il progettista intende orientare la struttura.

Appare chiaro, dunque, che l'applicazione acritica dei risultati derivanti da ottimizzazioni dello STM ottenute per via automatica, sulla base di principi teorici generali (come ad esempio quello della cosiddetta *minimizzazione* della energia di deformazione) che nel contempo non siano *condizionati* dal rispetto di regole costruttive, comporterebbe il rischio di progettare sulla carta una disposizione delle barre che poi si dimostri inaccettabile in cantiere. Non è certo possibile proporre una lista di esigenze costruttive con la pretesa di esaurire con essa un tema che è inevitabilmente articolato e vario, perché dipendente – fra l'altro – da condizioni locali. Ma è pur vero che a qualche raccomandazione si può riconoscere validità generale.

- Disposizione delle barre preferibilmente secondo due sole direzioni principali, ortogonali tra loro (ad esempio: orizzontale e verticale oppure radiale ed anulare).

- Incidenza delle barre tese e delle aste compresse del modello secondo angoli non troppo piccoli.
- Nodi “misti” (barre-conglomerato) organizzati evitando di localizzarli in vicinanza di punti di deviazione (e cioè collocati alla estremità di tratti rettilinei e paralleli delle due aste, tesa e compressa, che si scambiano gli sforzi interni).
- Nodi “misti” con deviazione degli sforzi ricondotti al caso precedente (mediante prolungamento in rettilineo delle barre oltre il nodo, ed ancoraggio finale alla biella compressa di ritorno al nodo lungo la medesima direzione).
- Ancoraggio delle barre tese adeguatamente prolungate oltre i nodi .
- Disposizione delle barre diffusa in più strati per contenere le percentuali di armatura - rispetto all’area del corrente di conglomerato che la avvolge formando il tirante – entro i limiti corrispondenti al rispetto delle verifiche di resistenza a compressione delle bielle di calcestruzzo *di ritorno* dalla estremità vincolata.
- Dimensionamento delle regioni di ancoraggio delle barre prossime ai nodi “misti” (barre-conglomerato) adeguato alle suddette esigenze di assemblaggio.
- Barre tese preferibilmente rettilinee, *incrociate* nei nodi.
- Barre tese curvilinee, se inevitabili, associate ad adeguati provvedimenti di dettaglio: raggi di curvatura ampi nelle regioni di sagomatura, rafforzati da spinotti e/o armature trasversali;ecc.
- Confinamento dei bordi verticali ed orizzontali con barre filanti longitudinali e staffe trasversali.
- Confinamento delle regioni in cui si prevede la formazione di spinte trasversali, ortogonali alle barre principali (ancoraggi, giunzioni, deviazioni in genere, variazioni di sezione, introduzione di carichi ecc.).
- Orientamento del comportamento reale della struttura verso quello ideale rappresentato dal modello, mediante irrigidimento per confinamento delle bielle compresse di calcestruzzo lungo le direzioni desiderate.
- Uniforme attuazione del livello di qualità della progettazione delle armature attraverso un disegno delle armature risultante dalla sistematica utilizzazione di *standard* di progetto: realizzazione di un catalogo personalizzato delle soluzioni di dettagli risultanti da studi di compatibilità delle esigenze costruttive e di industrializzazione della produzione edilizia con quelle più squisitamente strutturali.

Una possibile via per ottenere buoni risultati tramite l’implementazione di procedure automatizzate di ottimizzazione strutturale può partire dai risultati ottenuti senza porre alcun vincolo alla disposizione, forma o lunghezza delle armature. Successivamente, il traliccio così dimensionato può quindi essere assunto dall’ingegnere come riferimento in una fase di progettazione del *layout* delle armature che tenga presenti le esigenze costruttive di cui si è parlato.

Nonostante l’impegno che si deve porre perché questa fase sia anch’essa soggetta ad una verifica di compatibilità, è tuttavia inevitabile che la struttura, se non è in grado di realizzare il comportamento conforme alle sue effettive caratteristiche, cerchi di modificarlo per adattarlo a quello che è proprio del modello, e che ne assicura quanto meno le condizioni di equilibrio.

Sarebbe dunque particolarmente interessante disporre ogni volta della possibilità di valutare in qual misura il disegno delle armature adottato, per effetto dell’inevitabile compromesso con le esigenze costruttive, si discosta dalla soluzione teorica “ottimale”, e quindi in qual misura si richieda alla struttura questo *lavoro* per adeguarsi.

La differenza tra l'energia di deformazione del modello STM ideale e quella del traliccio *esecutivo* modificato dal progettista misura il sacrificio al quale la struttura è chiamata. Un sacrificio che consiste in una vera e propria dissipazione di energia di posizione dei carichi, e che si manifesta anche attraverso fessurazioni e – più in generale - plasticizzazioni locali.

3. Il progetto Strutturale delle Pareti in c.a. del Nuovo Auditorium di Roma

3.1. Descrizione dell'opera

Il progettista del nuovo Auditorium di Roma è Renzo Piano, vincitore di un concorso internazionale per inviti, conclusosi nel 1994.

La progettazione strutturale è stata affidata allo Studio Vitone & Associati di Bari.

L'intero spazio urbano ed architettonico destinato alla realizzazione del grande complesso musicale del nuovo Auditorium di Roma ruota attorno all'idea principale della centralità della musica.

Tutti gli spazi, sia esterni che interni, sono pensati in funzione della musica: non solo le tre sale, ma anche il vasto foyer che ne integra le funzioni e le porta a convergere verso il focus al centro della cavea, anfiteatro all'aperto di antica tradizione romana.

Le tre sale, di differente ampiezza e diversa destinazione funzionale, sono in grado di coprire tutte le esigenze musicali richieste: la sala grande (2.700 posti), destinata ai concerti sinfonici per grande orchestra e coro; la sala media (1.200 posti) caratterizzata da una maggior flessibilità acustica, adattabile ai più svariati tipi di musica anche in virtù delle diverse posizioni dell'orchestra rispetto al pubblico; la sala piccola (750 posti) "teatro della musica".

Anche le due sale prova (una per grande orchestra e coro ed una per solo coro) realizzano importanti spazi musicali, semplicemente più tecnici, in quanto tali da consentire di effettuare le prove sempre in condizioni acustiche ottimali, raggiungibili anche attraverso l'uso di elementi mobili. Il foyer stesso, in particolari occasioni, è in grado di ospitare semplici performances musicali.

La cavea all'aperto, capace di 3.000 spettatori, costituisce infine uno spazio musicale particolarmente interessante. Può infatti essere paragonata alla sala grande privata del tetto in quanto lo spazio che costituisce è stato progettualmente curato come un vero auditorium, con la sola differenza di essere situato all'aperto.

Attorno alle aree funzionali destinate alla musica, sono disposte aree destinate a parcheggi interrati, negozi, biblioteca e nastroteca, camerini, museo, bar, centrali tecnologiche.

L'intera area di progetto può essere considerata come un nuovo parco aperto al pubblico:

Dei circa cinque ettari del sedime dell'Auditorium ben quattro quinti sono restituiti come superfici esterne utilizzabili a parco pensile (circa 30.000 mq) ed a cavea e piazza (circa un ettaro).

Ne consegue che tutti gli edifici del nuovo Auditorium, ad eccezione delle tre sale sono completamente interrati al di sotto di una collina artificiale.

3.2. L'utilizzo degli "standard" nel progetto delle strutture delle tre sale della musica

La concezione geometrica delle tre sale, ed i loro peculiari aspetti architettonici sono incompatibili con soluzioni strutturali "da catalogo". Al contrario essi implicano un orientamento verso la adozione di "muri" portanti continui (pareti verticali; travi-parete) e - per gli organismi spaziali delle sale - di ossature miste (telai-pareti - solette), che traggono dalla solidarietà dei getti in opera la principale garanzia dell'efficacia del loro comportamento.

Per questi edifici, dunque, l'impiego della prefabbricazione è stato limitato all'uso - ove possibile - di lastre predalle, che tuttavia coprono la quasi totalità degli orizzontamenti.

Il "disegno" delle armature è stato eseguito - per tutte le aree funzionali - facendo riferimento a criteri appositamente studiati come "STANDARD" sia generali sia particolari, pensati per garantire alle strutture il conseguimento di elevate caratteristiche di duttilità, durabilità e resistenza.

La adozione di "STANDARD" delle armature, oltre che costituire un fattore di unificazione al quale sono stati ricondotti - in sede del progetto - edifici dotati di caratteristiche proprie così diverse favorisce - in sede di esecuzione - una organizzazione sistematica (se non proprio industrializzata) della lavorazione e del montaggio delle barre.

3.3. La concezione strutturale della sala grande

La sala 2700 - come le altre due sale musica - è dotata di una struttura portante autonoma, indipendente da quella di tutte le restanti parti dell'opera. Le ragioni di questa scelta progettuale vanno principalmente ricercate in esigenze di isolamento acustico.

Si distinguono - per le caratteristiche generali dell'impianto strutturale - due parti:

la base della sala: costituita dalle strutture del plenum - platea e dalle solette perimetrali che costituiscono i calpestii dei percorsi funzionali e del "back-stage";

le strutture del livello galleria superiore: costituite da un'ossatura portante, in calcestruzzo armato in opera, realizzata tramite un graticcio spaziale di travi radiali e costole (o travi-parete) anulari disposte fra la soletta piena inferiore e il solaio di copertura.

Le strutture portanti di copertura della sala sono previste in travi di legno lamellare, associato - nella sala vera e propria e nelle parti esterne - a elementi di acciaio.

I materiali previsti associano ad una relativa leggerezza elevate caratteristiche di resistenza e duttilità, particolarmente vantaggiose per il superamento di grandi luci.

Le travi in legno e acciaio sostengono una copertura (che svolge funzione anche di abbattimento acustico) costituita da una soletta in c.a. su lamiera grecata e da una ulteriore soletta, "galleggiante" su uno strato di materiale coibente ad alta densità, anch'essa in c.a. e armata con rete elettrosaldata zincata.

Al di sopra della seconda soletta è fissata la pannellatura di rivestimento esterno.

Le parti perimetrali della copertura - a sbalzo, esterne agli edifici - sono prive di solette e sono rivestite con la sola pannellatura di completamento.

Le travi primarie (a orditura trasversale) di copertura delle sale hanno una configurazione ad arco (parzialmente reticolare) con catena in acciaio.

L'arco reticolare è a tre cerniere, con appoggi scorrevoli a rullo, in acciaio. Ad una estremità gli appoggi sono resi fissi con collegamento meccanico alla struttura in c.a.

Le aste di parete sono a profili tubolari di acciaio con collegamenti a cerniere delle estremità.

La "tipologia" adottata conferisce solo un debole grado di iperstaticità interna alle travi principali, che manifestano - come dimostrato dall'analisi condotta su numerosi modelli di

calcolo, anche spaziali, nelle diverse condizioni di sollecitazione, comprese quelle “estreme” di incendio - un comportamento sostanzialmente assimilabile a quello di archi reticolari a tre cerniere.

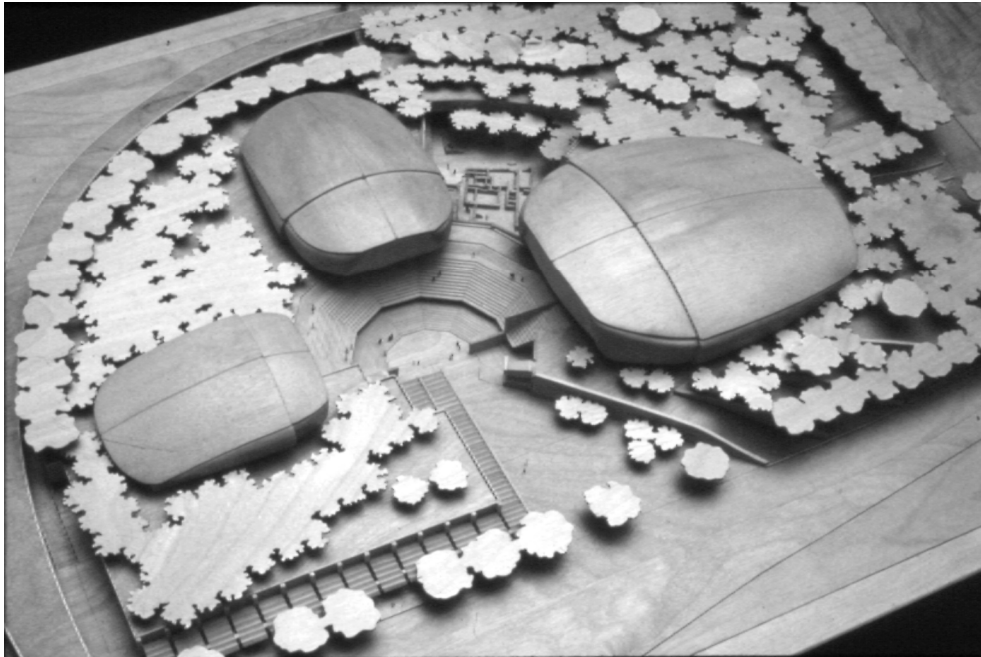


Fig. 1 - Plastico delle sale principali dell'Auditorium

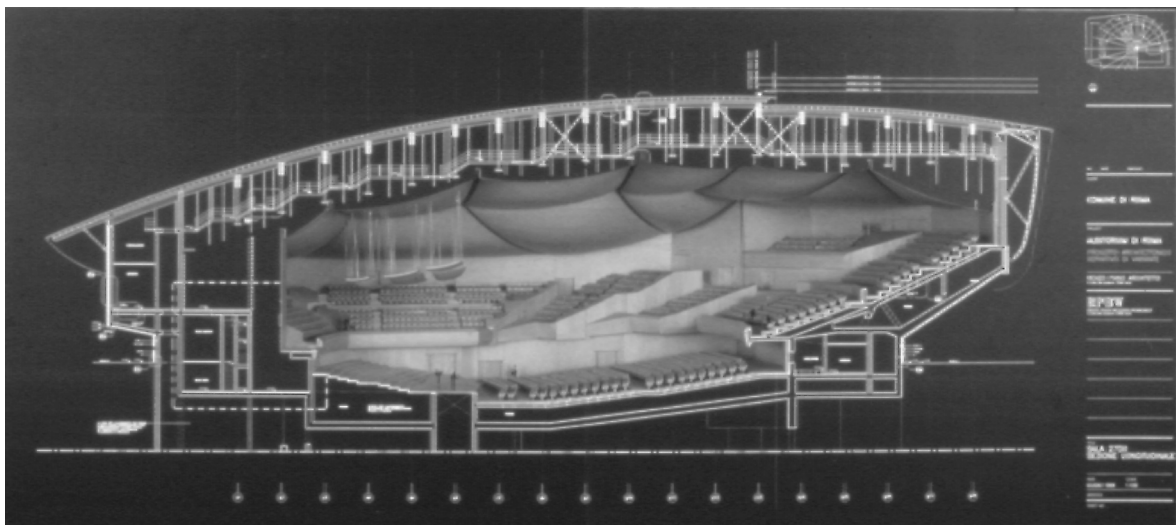


Fig. 2 - Spaccato di una sala dell'Auditorium

Le dimensioni delle travi primarie e il relativo “passo” sono stati condizionati dalle misure delle “luci” da coprire, dalla inusuale entità dei carichi permanenti previsti, nonché dalla esigenza di contenere l’altezza di ingombro nei limiti disponibili al di sopra della controsoffittatura. Per la sala 2700 sono previste n. 18 travi primarie, a passo di 4 m; la luce massima delle travi primarie è pari a 54 m, mentre l’altezza massima della travatura reticolare è pari a 5 m.

Gli arcarecci (a orditura longitudinale) sono costituiti da travi in L.L. disposte, su file parallele, a passo di 2 m circa.

Le strutture sovrastanti gli spazi interni perimetrali delle sale sono composte anch'esse da una doppia o semplice orditura di travi in L.L., a debole curvatura (per adeguarsi al profilo architettonico della superficie di copertura).

Nelle zone perimetrali esterne a sbalzo (con la configurazione "a riccio" nelle parti laterali) sono previste travi primarie a orditura "radiale" ad asse curvo (disimpegnate per motivi acustici dalle corrispondenti travi ricadenti all'interno delle sale vere e proprie), connesse da correnti in L.L. di piccola sezione, a fitta scansione (per meglio aderire alla geometria della superficie), su cui è direttamente sovrapposto il tavolato di rivestimento ed i relativi elementi di supporto.

Salvo che in poche zone di limitato oggetto, queste travi sono vincolate, oltre che alle pareti perimetrali in c.a. delle sale, a coppie di puntoni tubolari in acciaio (a "V" o ad "Y"), sempre con connessioni a cerniera.

Per tutte le travi - di tutti gli ordini - è previsto un sistema di controventi di falda, in barre tonde di acciaio con tenditori, che consente di conferire alla struttura di copertura una complessiva autonoma resistenza "orizzontale" (necessaria per la stabilizzazione degli elementi compressi) nelle fasi di montaggio e di normale "esercizio". La attivazione, successiva al montaggio, dei collegamenti - efficaci solo in direzione ortogonale alle travi - tra le travi stesse e la sovrastante soletta in c.a., conferisce stabilità alla struttura anche in condizioni "estreme" di incendio, nell'ipotesi che le sollecitazioni termiche da questo indotte rendano inefficaci gli stralli del controvento.

3.4. Criteri di progettazione e verifica dei setti verticali in c.a.

Criteri prettamente economici, derivanti dall'elevato sviluppo dei setti in c.a., ha condotto ad una progettazione in cui gli stessi sono stati armati nel maggior numero delle situazioni con la sola armatura minima regolamentare. Per questo le verifiche effettuate hanno riguardato la constatazione tramite FEA della tensione massima, inferiore a quella limite da norma. Il modello per queste analisi non considerava né forature né altre aperture all'interno degli stessi setti. I continui cambiamenti nella loro posizione e dimensione non permetteva infatti una loro modellazione definitiva all'interno dei modelli di calcolo. Si è preferito pertanto trattare i problemi locali tramite un approccio S&T, ipotizzando che le tensioni agenti nelle sezioni sovrastanti fossero (a vantaggio di sicurezza) pari a quelle limite permesse dalla norma (condizione che veniva verificata dalla sopraccitata analisi globale). Le analisi locali così condotte hanno permesso di procedere alla progettazione in maniera più spedita ed elastica, permettendo modifiche e cambiamenti nelle geometrie senza inficiare i risultati prima ottenuti. In questo frangente il metodo STM ha permesso la massima flessibilità in ragione della sua relativa semplicità analitica.

L'analisi locale ha portato alla determinazione di zone (quelle laterali alle stesse forature) in cui le tensioni sono risultate maggiori delle massime ammissibili per i setti. Pertanto queste zone sono state armate come dei pilastri, per ottenere una maggiore capacità portante. L'estrema localizzazione di queste zone non ha comunque prodotto aumenti apprezzabili di armature all'interno dell'economia generale dell'opera.

4. Applicazione del metodo STM per il progetto dell'armatura delle pareti semplicemente compresse dell'Auditorium di Roma in presenza di fori

Poiché nella scelta dell'L.P.M., fra gli infiniti possibili, è bene che esso comporti il trasferimento dei carichi con le minime sollecitazioni e deformazioni (massima compatibilità), il criterio proposto da Schlaich e Schafer è quello del minimo di energia di deformazione, che consiste nello scegliere quel modello a cui corrisponde il minimo dell'espressione (valida nell'ipotesi che il materiale abbia un comportamento elastico) :

$$\frac{1}{2} \sum F_i \cdot l_i \cdot \varepsilon_{mi} = \text{minimo} \quad (1)$$

che rappresenta, appunto, l'energia totale di deformazione del sistema di aste al quale la struttura è assimilata, dove :

- F_i = forza nel puntone o nel tirante i-esimo;
- l_i = lunghezza dell'asta i-esima;
- ε_{mi} = deformazione media dell'asta i-esima nella condizione di analisi.

Nel caso delle strutture in calcestruzzo armato, i tiranti sono sempre molto più deformabili dei puntoni, dato che l'energia di deformazione associata a questi ultimi può essere generalmente trascurata. Nella ipotesi, poi, che le armature siano dimensionate in base al criterio della massima economia, e quindi soggette tutte alla tensione di snervamento dell'acciaio f_{yd} , le ε_{mi} relative alle barre di armatura risultano costanti e pari a : $\varepsilon_{mi} = \varepsilon_y$.

Assumendo questo criterio secondo il quale il carico seguirà quei percorsi cui compete la minore energia di deformazione, è evidente che fra gli infiniti percorsi equilibrati che collegano il punto di applicazione di un carico N (punto di partenza $S=\text{start}$) al vincolo (punto di arrivo $E=\text{end}$) in una parete semplicemente compressa, il percorso ottimale risulta quello verticale. L'energia elastica D immagazzinata nel modello STM risulta pari a $D = \frac{1}{2}(\varepsilon_N Nl + \varepsilon_H Ha)$, in cui il primo termine rappresenta il lavoro del carico N ed il secondo il quello delle spinte H che si generano in corrispondenza di ogni punto di deviazione del carico.

E' evidente che nel caso di percorso del carico verticale essendo $H=0$ (assenza di alcuna deviazione del carico) il secondo termine è sempre nullo, ed inoltre $l = l_v$ rappresenta il percorso più breve fra gli infiniti possibili.

Risulta perciò banalmente verificato che il percorso puramente verticale risulta essere quello che rende minima l'energia D .

La presenza di un foro ovviamente impedisce al carico di seguire il percorso verticale ed impone almeno una coppia di deviazioni che consentano di aggirarlo. Queste deviazioni comporteranno l'insorgere di spinte per le quali bisognerà determinare il percorso "preferito" dal carico, quello cioè ottimale cui compete la minore D .

Il carico, indipendentemente da come viene disposta l'armatura, seguirà inizialmente tale percorso sfruttando, se le spinte che si generano per le deviazioni lo richiedono, la resistenza a trazione del calcestruzzo. Superata tale resistenza il calcestruzzo si fessurerà, e se l'armatura non è stata disposta lì dove il percorso ottimale impegna a trazione il materiale, poiché il carico non può superare una discontinuità (la fessura) per trazione dovrà deviare in cerca di percorsi alternativi. Ecco quindi la necessità non solo di disporre il "quantitativo" di armatura necessario ma anche di realizzare un suo disegno corretto di modo che il carico, quando venga meno il percorso di trazione fornito dal calcestruzzo, riesca, senza produrre quadri fessurativi notevoli, a sfruttare i percorsi di trazione forniti dalle barre d'acciaio.

Ci si propone quindi di individuare lo STM corrispondente a tale itinerario ottimale all'interno di una classe di percorsi definiti da una doppia deviazione del carico verticale. Tale classe di tralicci è determinata a meno dell'angolo di deviazione, che diviene pertanto un parametro incognito di problema

4.1. Deviazione delle bielle compresse: angolo di deviazione θ .

Con riferimento alla deviazione schematizzata in figura 3 si vuole valutare allo stato limite ultimo l'angolo di deviazione θ della biella compressa cui compete il minimo valore dell'energia.

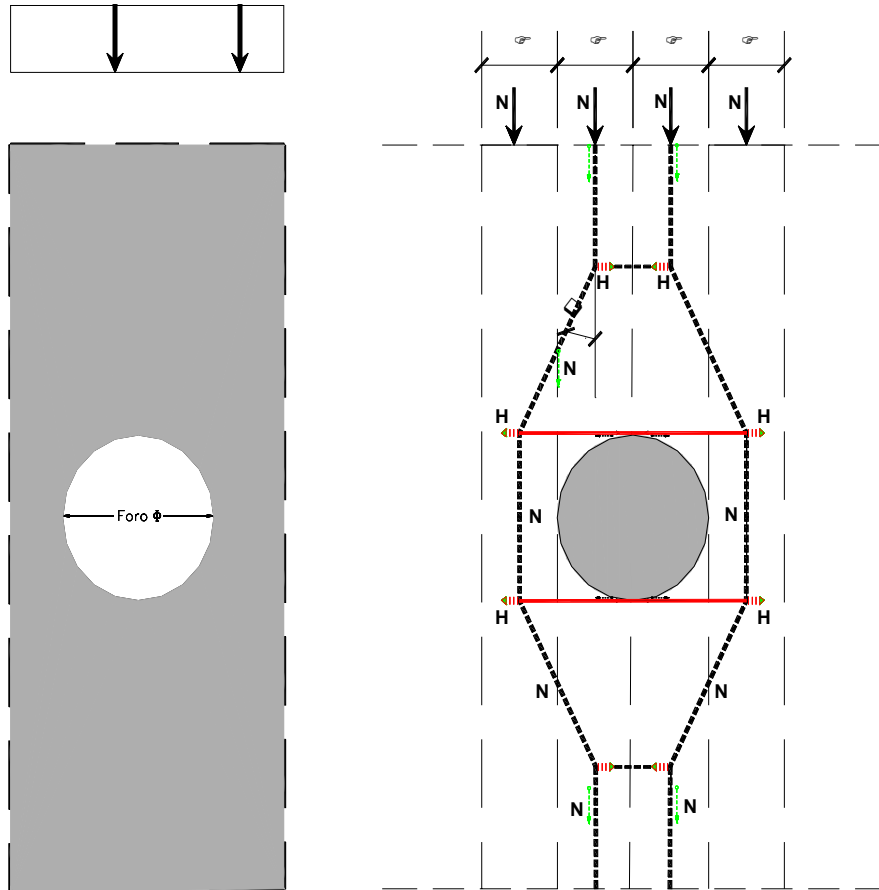


Fig. 3 - Schematizzazione ST delle forature presenti nei setti in c.a.

Ipotizzando che allo stato limite ultimo tutto lo sforzo di trazione sia equilibrato dall'armatura l'energia di deformazione vale:

$$D = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_c H \frac{\phi}{4} + \varepsilon_c l_1 N_1 + \varepsilon_s H \frac{3}{4} \phi \right] \quad (2)$$

ove $N_1 = N / \cos\theta$, $H = N / \tan\theta$, $l_1 = \phi / 2 \sin\theta$

Sostituendo questi valori nella [1] si ottiene

$$D = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_c \frac{N\phi}{\tan\theta} + \varepsilon_c \frac{\phi}{2} \frac{1}{\sin\theta} \frac{N}{\cos\theta} + \varepsilon_s \frac{3}{4} \frac{N}{\tan\theta} \phi \right] \quad (3)$$

con semplici passaggi si ottiene
$$D = \frac{N\phi}{4} \left[\frac{\sin^2 \vartheta (\varepsilon_c + 3\varepsilon_s) + \varepsilon_c}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \right] \quad (4)$$

ove i valori delle deformazioni vengono assunti pari a quelli limite previsti nel calcolo agli stati limite, per il calcestruzzo e l'acciaio, rispettivamente $\varepsilon_c=0.002$ ed $\varepsilon_s=0.010$.

Chiamando $(\varepsilon_c + 3\varepsilon_s) = a$ ed $2\varepsilon_c = b$ si deriva rispetto a θ l'energia così calcolata ottenendo

$$\frac{\partial D(\vartheta, a, b)}{\partial \vartheta} = 2a - \text{Csc}^2 \vartheta (b + a \sin^2 \vartheta) + \text{Sec}^2 \vartheta (b + a \sin^2 \vartheta) \quad (5)$$

Minimizzando D in funzione dell'angolo θ , mantenendo costanti i valori di a e b, si otterrà un valore $\theta \cong 20^\circ$ (Figura 4).

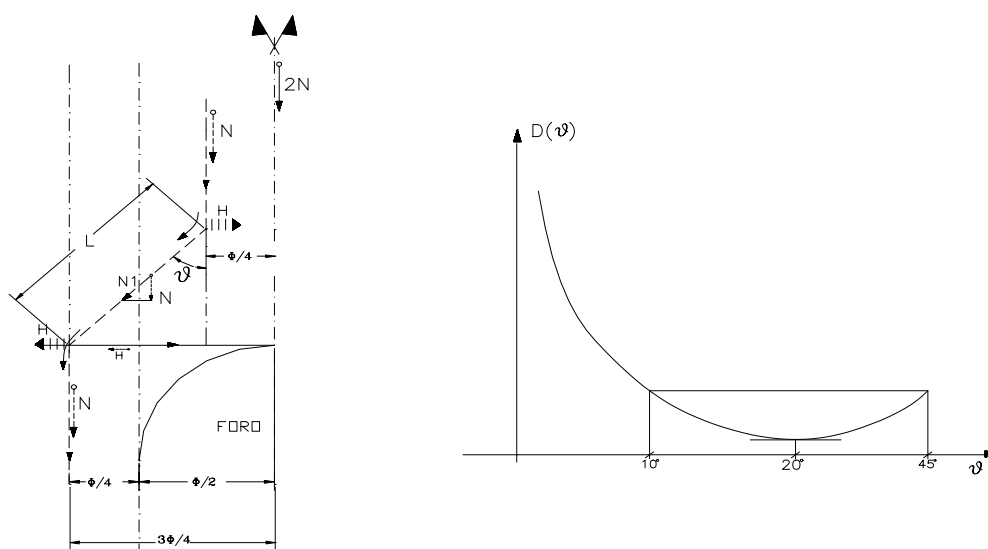


Fig. 4 - Variazione dell'energia di deformazione al variare dell'angolo di deviazione θ

Naturalmente il risultato è valido per i particolari valori di deformazione dell'acciaio e del calcestruzzo, e quindi in definitiva per le particolari condizioni di sollecitazione in cui si determina il traliccio. Peraltro si è potuto notare che facendo variare anche significativamente la deformazione dell'acciaio (principale indice di fessurazione nel calcestruzzo teso) il valore di θ ottimale non varia in maniera sensibile (figura 5) e pertanto il traliccio così ottenuto, oltre che adatto a descrivere la condizione al limite di collasso è in grado di descrivere efficacemente il comportamento strutturale della particolare sezione dei setti anche nelle fasi precedenti. Pertanto la disposizione e l'entità di armatura orizzontale disposta sopra le forature dei setti in c.a. viene ottenuta dall'applicazione dell'STM tramite il traliccio determinato con la metodica appena descritta. In questo modo non solo si garantisce l'elemento dal collasso ma anche (ragionevolmente) dall'instaurarsi delle fessure del c.a..

Qualitativamente si può notare che D è fondamentalmente dato dalla somma di due termini: il primo rappresenta il lavoro della componente del carico N lungo la retta inclinata di θ ; il secondo rappresenta il lavoro della spinta H.

Il primo termine è funzione, a parità di deformazione, del prodotto di N_1 e di l_1 . N_1 aumenta al crescere di θ , l_1 diminuisce al crescere di θ . Si può dimostrare che il prodotto di questi due valori è minimo quando $\theta = 45^\circ$.

Il secondo termine è fondamentalmente funzione della deformazione del percorso della spinta H . Se il percorso fosse infinitamente rigido la deformazione sarebbe nulla e quindi sarebbe nullo il contributo a D dato da H ; il valore di θ ottimale continuerebbe ad essere 45° . Più è deformabile il percorso della spinta più piccolo è il valore di θ ottimale; in particolare assegnato al percorso della spinta la deformazione limite del 1% si è trovato come valore ottimale $\theta = 20^\circ$.

Ovviamente affinché possa aversi un angolo così piccolo è necessario che al di sopra del foro si abbia un'altezza h di parete sufficiente, essendo $h = a \cdot \cotg\theta$.

È evidente che la possibilità che si realizzi un valore di θ piccolo dipende dal rapporto h/a ; maggiore sarà questo rapporto più piccolo sarà il valore di θ ammissibile e quindi minore sarà il valore della spinta H che dovrà essere ripresa dall'armatura.

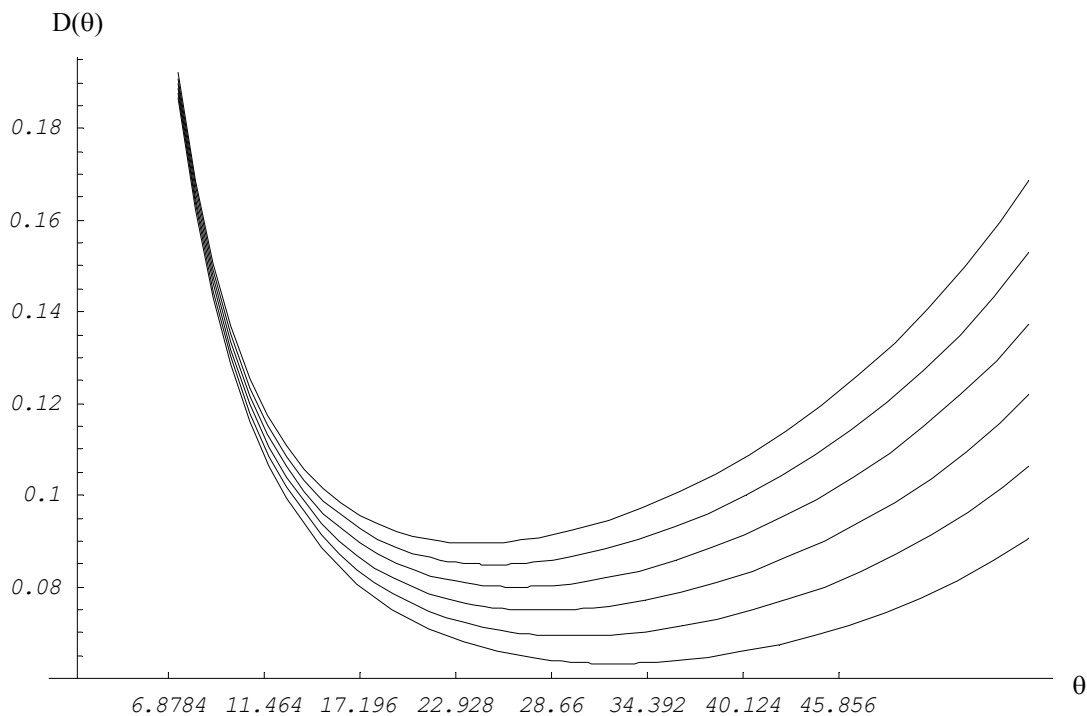


Fig. 5 - Variazione dell'energia di deformazione del traliccio al variare dell'angolo di deviazione θ per vari valori della ε_s dell'armatura tesa

Con semplici passaggi assolutamente simili a quelli precedenti si perviene al risultato, per $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$, di un valore di $\theta \geq 27^\circ$.

Come diretta conseguenza di quest'ultimo risultato si può asserire che quando l'altezza di parete al di sotto del foro è inferiore al diametro del foro è bene prolungare la zona laterale al foro armata come parete-pilastro sino al termine della parete, oltre a disporre la classica armatura orizzontale aggiuntiva inferiore per avere comunque margini di sicurezza, attesa l'iperstaticità del problema.

In maniera assolutamente analoga si può stabilire l'altezza di parete necessaria al di sotto del foro affinché avvenga la seconda deviazione delle bielle compresse (per ridistribuire le tensioni uniformemente su tutta la sezione utile), al fine di stabilire quando sia più opportuno prolungare la zona laterale al foro armata come parete-pilastro anche oltre l'altezza del foro sino al termine della parete, anziché disporre l'armatura aggiuntiva orizzontale inferiore. A tal fine si è calcolata l'energia di deformazione D_1 dissipata nel caso in cui il carico $2N$ proceda dritto senza subire l'ulteriore deviazione e la si è confrontata con l'energia D_2 necessaria

affinché il carico N subisca una deviazione nel percorso libero da carichi al di sotto del foro. Concettualmente significa vedere quando l'energia dissipata dalla spinta dovuta alla deviazione risulta essere compensata dalla minore dissipazione di energia del percorso del carico (che in un caso vale $2N$ e nell'altro N). Come nel caso precedente il calcolo verrà effettuato allo stato limite ultimo ipotizzando che l'equilibrio della spinta dovuta alla seconda.

Tipologie delle armature aggiuntive

Armatura aggiuntiva TIPO A

Dall'analisi effettuata si è visto come sia necessario ai fini dell'equilibrio disporre un'armatura orizzontale al di sopra del foro ; per quanto detto precedentemente tale armatura non va concentrata ma distribuita per una certa altezza al di sopra del foro. Una rappresentazione schematica di tale armatura è riportata in figura 6/C.

Armatura aggiuntiva TIPO B

Questa tipologia di armature ha il compito di assicurare la ripresa di sforzi di trazione dovuti ad eventuali bielle di compressione diagonali (Fig.6/B) (oltre che di irrigidire il percorso attorno al foro in modo che il carico venga "invogliato" a seguirlo). Tali bielle diagonali possono essere presenti a seguito di sollecitazioni orizzontali dovute ad eventi sismici o ancora in prossimità di appoggi concentrati

Armatura aggiuntiva TIPO C

Ha funzionamento analogo all'armatura Tipo A. Interviene permettendo alle forze verticali di ridistribuirsi una volta superato il foro, come precedentemente illustrato.

Armatura (compressa) aggiuntiva TIPO D (Fig. 6/A).

E' questa l'armatura aggiuntiva necessaria per trasformare la parete in una parete-pilastro al fine di garantire un carico ammissibile praticamente raddoppiato; tale incremento locale della capacità portante è necessario a causa del forte aumento di carico nella zona laterale al foro.

Sulla base di quanto osservato la schematizzazione del percorso del carico adottata porta a dire che:

l'armatura orizzontale aggiuntiva di tipo A e C distribuita per un'altezza sufficiente e sarà dimensionata per uno sforzo $H=N/\cotg\theta$ (detratto eventualmente lo sforzo assorbito dall'armatura orizzontale corrente);

l'armatura aggiuntiva di tipo D, necessaria per rendere la parete un pilastro, verrà disposta per tutta l'altezza del foro e per una larghezza almeno pari a $\theta/2$.

Da tale schema si evince l'importanza di garantire un rapporto $h/(\theta/2)$ molto elevato al fine di poter avere valori di θ bassi (e quindi $\cotg\theta$ elevati) e quindi spinte H modeste.

Questo vuol dire che, principalmente per fori molto grandi (quindi con θ elevato) e/o aventi modeste altezze h di parete al di sopra e al di sotto , è importante localizzare l'armatura orizzontale aggiuntiva il più possibile vicino al foro.

5. Conclusioni

Nella progettazione strutturale del calcestruzzo armato la risoluzione delle zone non direttamente risolvibili con approcci "tradizionali" ha permesso lo sviluppo di metodi di analisi e verifica basati su STM. Nonostante siano proposti in letteratura numerose metodiche atte a determinare i tralacci equivalenti per l'impiego di questi metodi, attualmente non tutti sono di agevole implementazione. Soprattutto nelle reali condizioni di progettazione essi richiedendo notevoli risorse in termini di computazione e modellazione dei problemi

medesimi, difficilmente compatibili con le esigenze di progettazione. Per questo si è descritto un esempio di applicazione dell'STM ad una progettazione strutturale di una opera complessa basata su di un approccio semplice, che ha comunque mostrato una notevole versatilità. Il suo impiego ha permesso di proceduralizzare e semplificare la progettazione delle forature presenti nei setti in cemento armato. Attualmente molte normative prevedono la possibilità di impiego di STM nella progettazione delle strutture di calcestruzzo armato, ed è prevedibile che questa tendenza si consoliderà ed incrementerà nei prossimi anni. L'esperienza effettuata mostra che oramai tali tecniche siano mature per un impiego maturo e diffuso non solo nella ricerca ma anche nella progettazione strutturale.

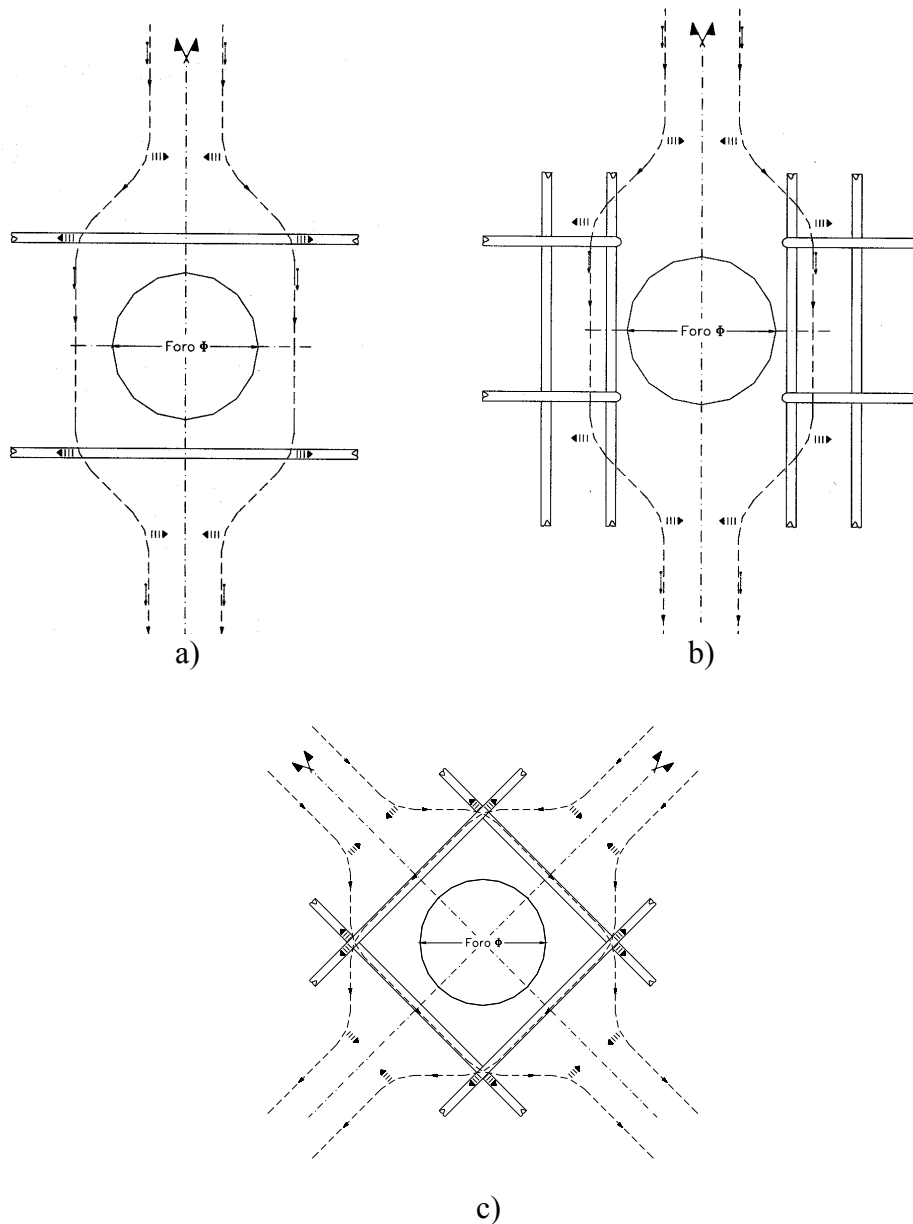


Fig.6 - Tipologie delle armature aggiuntive

Riferimenti bibliografici

1. Strutt, J.W. (Lord Rayleigh): On the Theory of Resonance. Trans. Roy. Soc., London, A 161, pp. 77-118, 1870.
2. Ritz, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. J. reine angew. Math. 135, 1-61, 1908.
3. Absi, E.: La théorie des équivalences et son application à l'étude des ouvrages d'art, Annales de l'Institut Techn. Du Batiment et des Travaux Publics, Supplément au N. 298, 1972, pp. 59-77.
4. V. Giannuzzi, A. Vitone, V. Vitone: Sulla convergenza del metodo degli elementi finiti lineari, Giornale del Genio Civile, fasc. 4°-5°-6°, Apr.-Mag.Giu. 1978.
5. K.Schafer: Strut-and-Tie Models for Design of Structural Concrete - Workshop – Dep. of Civil Engineering National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan, R.O.C., 1996.
6. A. Vitone, V. Vitone, G.C. Marano. (a cura di M. Mezzina): Costruire con il Cemento Armato, Ed. UTET, 2001.
7. Eurocodice 2, Progettazione delle strutture di calcestruzzo, parte 1-1: Regole generale e regole per gli edifici, CEN, 1991.
8. Prof. Ing. K. Schafer, "Strut-and-Tie Models for the design of structural concrete", Workshop, Tainan 1996.
9. IABSE Colloquium Stuttgart 1991, "Structural Concrete", IABSE Reports, 1991.
10. F. Biondini, F. Bontempi, P. G. Malerba, "Ricerca di modelli strut-and-tie mediante programmazione lineare", Studi e Ricerche, 1996.
11. F. Biondini, F. Bontempi, P. G. Malerba, "Strut-and-Tie models in reinforced concrete design", FIB International Course, Treviso, July 1998.
12. D. Angotti, P. Spinelli, "Alcune riflessioni per il riconoscimento di meccanismi Strut-and-Tie in strutture di cemento armato", L'industria italiana del Cemento, 1995.
13. M. P. Bendsoe, "Optimization of structural topology, shape and material", 1995 (Springer-Verlag, Berlin).
14. G.I.N. Rozvany, "Structural design via optimality criteria", 1989 (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht).
15. K. Maute, E. Ramm, "Adaptive topology optimization", Structural Optimization, 1995.
16. Liang, Y. M. Xie, G. P. Steven, "On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization", Structural Optimization, 1999.

17. Liang, Y. M. Xie, G. P. Steven, "A performance-based optimality criteria method for optimization of strut-and-tie models in low-rise shearwalls", ACI Structural Journal, 1999.
18. F. Leonhardt, E. Monnig, "C.A. & C.A.P. L 'armatura nelle costruzioni in cemento armato", Vol. III, 1977.
19. M.N. Fardis, A. Harisis, "Computer-aided automatic construction of Strut-and-Tie models", in IABSE Colloquium, Struttgart, 1991.
20. A. Antonelli, P. Spinelli, "Algoritmi per lo Determinazione di Modelli 'Strut - and - tie" in Elementi Strutturali di CA.", Giornate AICAP '97 dedicate a Carlo Cestelli Guidi "L'innovazione e la Realtà delle Opere di Calcestruzzo Strutturale", 1997.