Il metodo del percorso del carico

Fabrizio Palmisano, Amedeo Vitone, Claudia Vitone

13.1 La scelta del modello

La controversa questione di metodo che talvolta vede contrapporsi un empirismo fondato sulla radicata fiducia nell'esperienza, al razionalismo intransigente dei teorici dell'analisi numerica, potrebbe trovare un punto di equilibrio nell'identificazione di un modello di analisi che soddisfi entrambe le esigenze.

In tale prospettiva si colloca l'obiettivo di questo capitolo.

Traendo spunto da studi ai quali si riconosce di avere favorito la nascita e lo sviluppo delle costruzioni in calcestruzzo armato alla fine del XIX secolo, si propone l'impiego dello *Strut-and-Tie Model* (STM), come strumento di analisi, e del *Load Path Method* (LPM), come metodo per ricalcare i profili geometrici dello STM sulla realtà fisica dell'organismo strutturale da progettare.

Questa scelta ha origine nella convinzione che non sia utopia un modello capace di prefigurare il comportamento di un sistema strutturale - nel suo insieme, come nei suoi aspetti di dettaglio - rendendone immediatamente percepibili le correlazioni fra forma e struttura; un modello che anticipi i risultati del calcolo semplicemente svelando come si possa riconoscere nelle forme dell'architettura e delle sue patologie il carattere della struttura, attraverso una anamnesi che conduca sino all'attuale configurazione (Fig. 13.1).

La scelta del modello è una fase decisiva del processo costruttivo. Se sottovalutata, potrebbe portare a risultati fuorvianti. Si tratta di scegliere un modello che, nel simulare sia le caratteristiche formali della struttura sia quelle comportamentali, correli i due aspetti in modo semplice, chiaro e immediato.

Qualcosa del genere ha fatto John Ruskin nelle pagine dedicate alla natura del gotico del suo *The Stones of Venice* [8], utilizzando pochi ed elementari simboli, schemi, che gli consentono di stabilire le differenze tra architettura greca, romanica e gotica, attraverso considerazioni cariche di fascino (Fig. 13.2).



Fig. 13.1 - La cupola del Pantheon di Roma, la cattedrale di Notre-Dame di Parigi, il ponte Golden Gate di San Francisco



Fig. 13.2 - John Ruskin [3]: architettura greca, romanica e gotica

Un altro obiettivo da porsi al momento della scelta del modello è quello di dotare il progettista di uno strumento di così agile e sintetico impiego da rendere possibile la verifica del progetto contestualmente alla sua concezione geometrica e formale. Si è già accennato al fatto che rispondevano a taluni di questi requisiti i modelli in muratura della tradizione classica rinascimentale e dell'architettura gotica che consentivano fra l'altro di anticipare, sia pure su scala ridotta, le verifiche di resistenza strutturale.

Esigenze di tempo, di economia e di natura tecnica inducono oggi - pur sempre nel tentativo di recuperare una correlazione non mediata fra forma architettonica e comportamento strutturale - ad orientare la scelta verso modelli grafici, che restituiscano al progettista l'abilità di ritrovare nel disegno la verifica della propria ispirazione creativa.

Il comportamento delle costruzioni in calcestruzzo armato è notevolmente influenzato dalla qualità del progetto e della realizzazione dei dettagli costruttivi, e principalmente di quelli riguardanti le disposizioni costruttive delle armature. L'efficacia e la versatilità di un modello di analisi strutturale deve essere dunque valutata anche in funzione della sua attitudine a simulare i comportamenti locali (riguardanti appunto i dettagli delle armature), non meno che quelli globali.

La complessità della questione, tuttavia, è tale che non è sempre possibile conseguire risultati soddisfacenti esclusivamente attraverso l'impiego di modelli teorici, neanche quando questi vengono ridotti alla indagine su un particolare aspetto del comportamento dell'elemento strutturale. Tanto che si è costretti a ricorrere talvolta all'ausilio di formulazioni empiriche, suffragate da prove sperimentali, in sostituzione o ad integrazione di quelle teoriche.

Gli attuali orientamenti, in linea con la tradizione della ricerca europea, mirano tuttavia a limitare, per quanto è possibile, l'impiego di tali formulazioni, ed a trarre dalle prove sperimentali ispirazione per la costruzione piuttosto di modelli sempre più affinati, che non di procedure empiriche.

Fra gli obiettivi principali, ai quali deve ispirarsi la scelta del modello, rientra dunque quello di dotarsi di un efficace strumento per un'appropriata ed accurata progettazione delle armature. Infatti, come si è detto, non solo il loro dimensionamento ma anche le disposizioni relative alla loro organizzazione ed ai dettagli costruttivi finiscono con l'assumere una decisiva influenza su tutti gli aspetti ai quali si riconduce il comportamento di una struttura in c.a.: resistenza e duttilità, funzionalità, durabilità, estetica, economia.

L'analisi delle tensioni e delle deformazioni in tutti i punti della sezione di un elemento strutturale è notevolmente semplificata se si adottano le ipotesi di Bernoulli, tanto da permettere, con limitato impegno, di acquisire una conoscenza anche molto accurata del comportamento nelle regioni in cui l'elemento è effettivamente conforme alle suddette ipotesi (regioni *B: Beam*, *Bending, Bernoulli*).

Il modello di Bernoulli non è tuttavia applicabile alle "regioni di discontinuità" (regioni *D: Discontinuity, Disturbance, Detail*), identificabili come quelle in cui il comportamento dell'elemento strutturale è caratterizzato da una discontinuità per effetto di singolarità locali geometriche e/o statiche.

Del resto la ricerca di un altro modello, più versatile di quello di Bernoulli, capace di simulare il comportamento dell'elemento strutturale non solo nelle regioni B, ma anche in quelle D, per molto tempo non è stata alimentata da un grande interesse scientifico. Ciò malgrado sin dalla fine del XIX secolo Hen-

nebique, Ritter e Mörsch hanno proposto modelli di analisi già orientati in questa direzione.

Le ragioni del successo del modello di Bernoulli sono varie. In primo luogo esso esercita il fascino del rigore matematico della procedura, e vanta proprio perché ampiamente collaudato nel tempo - una definitiva verifica di attendibilità in un ampio ambito di tipologie strutturali.

Un'altra ragione sta nel fatto che non si è a lungo attribuita grande importanza alla accuratezza dell'analisi delle regioni D, che pertanto era affidata prevalentemente a criteri empirici.

Solo negli ultimi decenni si è potuta definitivamente accertare la grande influenza che la corretta progettazione delle regioni di discontinuità ha sul comportamento (non solo allo stato limite ultimo) degli organismi strutturali; anche quando esse sono localizzate, e di limitata estensione, come negli angoli dei telai (i nodi trave-pilastro), o nei nodi calcestruzzo - barre di armatura.

D'altra parte la presenza di tali nodi è così diffusa (capitolo 14) anche negli organismi costituiti da travi prevalentemente assimilabili a regioni B da giustificare ampiamente un orientamento della ricerca verso un unico modello, che consenta di analizzare le strutture con un grado di attendibilità uniforme per tutte le regioni, indipendentemente dalla singolarità locale della geometria e/o della condizione di carico.

13.2 Cenni storici

Il modello *strut-and-tie* nasce come semplice rappresentazione del complesso funzionamento statico di un elemento in c.a. soggetto a flessione e taglio. Fu introdotto da Ritter nel 1899 sulla base dell'idea originaria di Hennebique, sviluppato negli anni successivi dallo stesso Ritter e da Mörsch (1909) ed esteso ad elementi soggetti a torsione nel 1929 da Rausch.

Passarono tuttavia diversi decenni prima che si focalizzasse l'attenzione sul traliccio con inclinazione delle bielle compresse variabile (Chambaud, 1957) come modello per l'interpretazione dei differenti tipi di rottura per taglio, e che lo sviluppo e l'applicazione delle teorie della plasticità alle strutture in c.a. ne giustificassero ed estendessero l'applicabilità. Nel 1975 Thürlimann suggerì un modello di traliccio con inclinazione delle bielle compresse variabile ma limitata da condizioni cinematiche.

Il successivo sviluppo dell'applicazione della teoria della plasticità al calcestruzzo strutturale è rappresentato dalla generalizzazione dei concetti derivati dall'analogia del traliccio attraverso l'introduzione di campi di compressione discontinui (*strut*) in equilibrio con le sollecitazioni di trazione (*tie*), ad opera principalmente della scuola di Thürlimann di Zurigo e della scuola di Stoccarda; quest'ultima, con Schlaich e altri [10], propone un approccio di tipo globale al progetto delle strutture attraverso il modello *strut-and-tie*, che consente la considerazione contestuale degli sforzi dovuti a tutte le sollecitazioni presenti e la possibilità di utilizzare un solo modello per progettare sia le regioni *D* sia le regioni *B*.

Oggi lo STM è recepito dalle più accreditate normative internazionali (e.g. CEB-FIP Model Code 1990, Eurocodice 2, Canadian Code, AASHTO, ACI-318).

Il metodo dell'itinerario del carico (LPM), utilizzato come mezzo di indagine del comportamento strutturale nella fase che precede il disegno dello STM, è stato introdotto da Schlaich & Schäfer durante un Workshop tenutosi a Taiwan nel 1996 [9] e successivamente sviluppato principalmente ad opera di A. Vitone, F. Palmisano, C. Vitone ([2], [3], [4], [5], [6], [7], [11], [12]).

L'ultima versione dell'Eurocodice 2 [1] recepisce il LPM quale mezzo per lo sviluppo di idonei modelli *strut-and-tie* per l'analisi plastica delle strutture in calcestruzzo.

13.3 Fondamenti del metodo

L'ambiente naturale nel quale sono inserite espone le masse delle opere architettoniche ad accelerazioni. Dalle masse nascono così le forze e, di conseguenza, l'esigenza di un'ossatura portante. Le accelerazioni, prevalentemente, agiscono in direzione verticale (gravità) oppure orizzontale (e.g. vento, sisma). L'interpretazione della concezione strutturale di un'opera architettonica risulta, per quanto appena detto, notevolmente semplificata se si conviene di riferire i carichi al semplice sistema cartesiano ortogonale costituito dai due assi orizzontale e verticale. Ogni volta che, in seguito, ci si riferirà ad un carico verticale, non si vorrà togliere generalità alla trattazione, ma, semplicemente, per maggiore chiarezza, riferirla alla realtà fisica dell'ambiente in cui nasce e vive l'opera architettonica.

Il percorso del carico (*Load Path*) rappresenta la linea lungo la quale una forza o la componente di una forza (più precisamente la componente di una forza lungo una direzione scelta, per esempio la componente verticale di un'azione), fluisce attraverso una struttura dal punto di applicazione (la stazione di partenza: *start*, *S*) a quello terminale (*end*, *E*). In corrispondenza di ogni nodo di deviazione il carico itinerante *F*, deve imprimere una spinta (*H*) alla restante parte di struttura e ricevere un'azione uguale ed opposta affinché l'equilibrio venga rispettato (figure 13.3 e 13.4).

Per definizione di percorso del carico, la componente (F nelle figure 13.3 e 13.4) della forza portata dal vettore N, resta costante lungo il proprio itinerario all'interno della struttura; ne consegue che, per definizione di *load path* e per ragioni di equilibrio locale, perché entrambi i percorsi, di entrata e di uscita da un nodo, rappresentino l'itinerario esclusivo di un medesimo carico F, la spinta H impressa alla struttura, deve essere ortogonale al carico itinerante F.

Il disegno di questo fluire del carico attraverso la struttura è rappresentato, allora, dalle traiettorie che possono essere approssimate con poligonali nei cui nodi si concentrano le deviazioni necessarie ai cambi di direzione. Itinerari curvilinei, infatti, possono naturalmente essere sostituiti da linee poligonali equivalenti, conseguendo, così, un grado di approssimazione che può rendersi commisurato, quanto si vuole, alle esigenze di analisi, semplicemente adottando una spezzata adeguatamente aderente al profilo curvilineo (Fig. 13.5).



Fig. 13.3 - Load Path (LP) e Strut-and-tie model (STM)



Fig. 13.4 - Load Path: simboli



Fig. 13.5 - Approssimazione di un percorso curvilineo con una poligonale equivalente

In un sistema di riferimento naturale (carichi verticali, spinte orizzontali) la struttura è attraversata da flussi discendenti di compressione (linee tratteggiate) e/o da flussi risalenti di trazione (linee continue). L'iperstaticità interna si identifica con la presenza, offerta dal corpo strutturale, di diversi possibili (cioè equilibrati) itinerari, che hanno tutti in comune le stazioni di partenza (S) e di arrivo (E).

Tra le infinite possibilità che hanno i carichi di utilizzare i percorsi disponibili in una struttura iperstatica, la scelta cade sulla configurazione più economica, che cioè richiede il minimo possibile investimento in termini di energia di deformazione e che quindi rappresenta l'unica equilibrata e congruente. Ad essa corrisponde l'*assestamento* minimo della struttura, e cioè il minimo quantitativo di energia di posizione dei carichi, da trasformare in energia di deformazione. L'energia totale di deformazione (D) investita risulta pari a

$$D = \frac{1}{2} \int_{V} \mathbf{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} dV \tag{13.1}$$

in cui V è il dominio di integrazione, σ ed ε sono rispettivamente il vettore delle tensioni e delle deformazioni unitarie.

Lungo il generico percorso (poligonale in questo modello) il calcolo dell'energia di deformazione risulta pari alla somma dei termini relativi ad ogni segmento *i* della medesima poligonale:

$$D = \sum_{i} D_{i} \tag{13.2}$$

In figura 13.6 sono indicati i contributi elementari D_i dell'energia di deformazione, valutati per i casi più ricorrenti nell'ipotesi di assumere, per i materiali, il comportamento elastico.

13.3.1 Una definizione di struttura

È possibile proporre una particolare formulazione della definizione di struttura che risulti conforme allo scenario di progetto precedentemente delineato.

Nell'ambito della Tecnica delle Costruzioni si può definire struttura un corpo che, durante tutto il periodo della sua vita utile, per assicurare i livelli prestazionali prefissati, è destinato ad essere soggetto ad un sistema di forze, in equilibrio tra loro, ma applicate in punti diversi.

Un elemento strutturale è una porzione di detto corpo il cui comportamento reale, generalmente assai complesso, sia tuttavia esprimibile mediante formulazioni dirette, caratteristiche di un modello semplice, comunemente denominato "elemento finito".



Fig. 13.6 - Energia di deformazione elastica in alcuni casi tipici di puntoni e tiranti

Le suddette formulazioni legano i valori dei movimenti di taluni punti del modello, spesso scelti sul contorno (i nodi), all'intensità delle corrispondenti forze ivi applicate, e consentono di pervenire da quei valori a quelli caratteristici dei movimenti di qualsiasi altro punto.

Gli elementi finiti possono essere monodimensionali (o lineari, quali aste ad asse rettilineo o curvilineo) oppure bidimensionali (piastre o lastre) o, infine, tridimensionali (e.g. corpi prismatici, cilindrici, tetraedrici).

Alcuni metodi di analisi delle strutture consistono pertanto in procedure finalizzate allo studio di modelli più o meno complessi, costruiti mediante la mutua connessione di uno o più elementi.

Le connessioni possono imporre un vincolo mutuo ad uno o più movimenti

delle estremità nodali degli elementi (e.g. cerniere, nodi di continuità). Per l'analisi di questi modelli è spesso utilizzato in larga misura il principio di sovrapposizione degli effetti, secondo il quale, scomposto un generico e complesso sistema di forze in sistemi parziali semplici, il loro effetto risultante è pari alla somma algebrica di quelli che sarebbero da essi prodotti se agissero singolarmente sul corpo considerato. Il principio di sovrapposizione degli effetti è applicabile a condizione che gli effetti delle non linearità geometriche risultino trascurabili ("deformazioni piccole") ed il comportamento del materiale resti nel campo della elasticità lineare.

La precisione dei risultati dipende fondamentalmente dalla qualità complessiva del modello e cioè dalla misura della sua aderenza al reale. Questa è a sua volta funzione sia della raffinatezza con cui il singolo elemento è in grado di rappresentare il comportamento della corrispondente porzione di corpo reale, sia della fedeltà di rappresentazione dell'intera struttura attraverso l'organizzazione di tali elementi in un sistema complesso.

13.3.2 Il disegno dello STM con il LPM

Lo STM è un particolare modello complesso formato dall'organizzazione di elementi lineari ad asse rettilineo; tutti i nodi sono sconnessi alla rotazione; tutte le azioni esterne e le reazioni vincolari sono costituite da forze applicate ai soli nodi. Di conseguenza tutte le aste del modello possono essere soggette esclusivamente a sforzo normale di compressione (puntoni: *strut*) o di trazione (tiranti: *tie*).

Caratteristica peculiare dello STM è dunque l'adozione di un elemento finito estremamente semplice. La precisione dei risultati, pertanto, dipende principalmente dalla misura in cui il modello - anche grazie ad una adeguata organizzazione geometrica delle sue aste - aderisce alla effettiva configurazione della struttura.

Perché possa giudicarsi effettivamente aderente alla realtà, il modello dovrebbe, fra l'altro, essere in grado di riprodurre l'elevata iperstaticità interna, di cui quasi sempre è dotata la struttura. In un continuo in calcestruzzo armato, del resto, sono in teoria infinite, per un assegnato sistema esterno equilibrato di forze, i corrispondenti percorsi di carico possibili, e cioè rispettosi delle condizioni di equilibrio.

Con un adeguato controllo di compatibilità, è tuttavia possibile conseguire soddisfacenti risultati anche con singoli STM isostatici, se si applica il principio di sovrapposizione degli effetti in modo da scomporre il sistema in più modelli semplici, tutti staticamente determinati.

Diventa pertanto di fondamentale importanza per il progettista la qualità del disegno del modello: inclinazione, lunghezza, addensamento delle aste, profili geometrici d'insieme.

Alla notevole semplificazione dell'analisi numerica - rispetto a modelli formati con elementi finiti più complessi - fa dunque riscontro uno speciale impegno nel tracciare la geometria del modello. Un impegno che, dovendo trarre ispirazione dalla previsione anche sommaria del comportamento strutturale, restituisce al progettista il controllo dei contenuti tecnici delle proprie scelte formali sin dal momento della prima concezione dell'opera.

Riveste dunque particolare interesse, in questa ottica, la ricerca di strumenti che rendano meno empirica la scelta del disegno del modello.

Il metodo del percorso del carico (LPM: *Load Path Method*), utilizzato come mezzo di indagine del comportamento strutturale, può risultare particolarmente efficace nella fase che precede il disegno dello STM.

Approcci ben più sofisticati sono naturalmente oggi possibili e in taluni casi indispensabili, come ad esempio la simulazione del comportamento della struttura su modelli formati da elementi finiti complessi, analizzati per via automatica al computer.

Anche in questi ultimi casi, tuttavia, il progetto definitivo della struttura in calcestruzzo armato può opportunamente continuare ad essere ispirato a modelli *strut-and-tie*, a loro volta tracciati con l'ausilio del LPM.

Infatti quest'ultimo rappresenta uno strumento di sintesi e di verifica dei risultati (spesso dispersivi) dell'analisi automatica, oltre che di adeguamento del progetto a speciali caratteristiche locali, proprie delle opere in c.a., sulle quali generalmente non si spinge, per ragioni di economia, l'indagine al computer.

13.3.3 I percorsi dei carichi e delle spinte disegnano la struttura

Il disegno del percorso del carico lungo le sue poligonali non sarà altro che la schematizzazione di un continuo in cui si concentra, lungo una traiettoria, una definita geometria.

La forma strutturale in architettura, però, non è solamente quella disegnata dal percorso del carico, ma dal sistema costituito dalla combinazione di quest'ultimo e di quello delle relative spinte. In questa scomposizione di profili (gli itinerari dei carichi e delle spinte), si potrebbe riconoscere la chiave di lettura delle strutture in architettura.

Si possono individuare due elementi fondamentali: il nodo e il tratto rettilineo. Nel primo si concentreranno le spinte che, a loro volta, interesseranno la struttura con altri percorsi.

Dopo avere delineato lo scenario generale, può essere ora utile fare qualche passo indietro, e proporre un approccio graduale, più analitico, alla costruzione del modello.

A tal fine è particolarmente efficace operare una distinzione concettuale fra percorso dei carichi e percorso delle spinte.

Un'altra rilevante distinzione, in ambiente gravitazionale, è quella fra itinerari di discesa ed itinerari di risalita dei carichi. Si vedrà poco più avanti come anche questa possa essere una chiave di lettura del disegno dell'architettura strutturale

In ambiente gravitazionale accade spesso che nel tracciato del percorso dei carichi si identifichi l'obiettivo del progetto, e che i conseguenti percorsi delle spinte rappresentino le condizioni necessarie per conseguire quegli obiettivi¹. Nel contempo accade molto spesso che il percorso delle spinte risulti tuttavia decisivo ai fini della completa definizione della forma dell'architettura strutturale e della correlativa tecnica costruttiva da adottare.

Si potrebbe quasi affermare che la storia dell'architettura strutturale si identifica con quella della evoluzione della gestione costruttiva degli itinerari delle spinte impresse dai vettori nei nodi di deviazione, lungo il percorso dei carichi.

Appare dunque conveniente, come si è detto, un approccio graduale, che consista nel distinguere:

- itinerari dei carichi privi di deviazioni, che non comportano l'insorgere di spinte;
- itinerari dei carichi con deviazioni, che implicano la presenza di spinte.

13.3.4 Il percorso del carico senza deviazioni

Un esempio semplice di struttura è rappresentato da una colonna (Fig. 13.7).



Fig. 13.7 - Percorso del carico in una colonna

¹ Si vedranno più avanti modelli rappresentativi del comportamento di strutture classiche, come l'arco, la cupola, la trave, che mettono in luce questa essenziale distinzione concettuale fra percorsi dei carichi e percorsi delle spinte.

Il carico verticale $F=N_c$, applicato all'estremità superiore, deve raggiungere, per trovare equilibrio, il carico uguale e contrario, applicato alla estremità inferiore. Si faccia riferimento allo schema lineare di figura 13.7b (LP) e 13.7c (STM), nel quale le suddette sezioni sono rappresentate dai nodi *S* (*Start*) ed *E* (*End*), rispettivamente. Il percorso è rappresentato dal tratto verticale $S \rightarrow E$, lungo il quale il carico *F* è portato dal vettore *N*. In generale il percorso di un carico verticale può essere inclinato, rispetto all'orizzontale, di un angolo $\theta \neq 90^{\circ}$ (Fig. 13.8a). Il carico è portato lungo l'itinerario, da *S* ad *E*, da un vettore, *N*, la cui intensità è funzione sia della misura del carico trasportato, *F*, sia della inclinazione del percorso θ .



Fig. 13.8 - Percorso del carico inclinato rispetto al carico itinerante

Alcuni simboli e convenzioni sono utili al fine di rappresentare il significato del modello. Così lungo il percorso, di tanto in tanto, è opportuno rappresentare il carico che vi transita con una freccia, che conviene sia tratteggiata², per distinguerla dai simboli rappresentativi di forze effettivamente applicate³; inoltre conviene, sempre di tanto in tanto, indicare con la punta di una freccia il verso di percorrenza⁴.

Il vettore N è la sollecitazione di sforzo normale semplice che nella generica sezione trasversale dell'elemento strutturale del percorso deve nascere af-

 $^{^{2}}$ Si veda (*) nelle figure 13.7 e 13.8.

³ Si veda (***) nella figura 13.7.

⁴ Si veda (**) nelle figure 13.7 e 13.8.

finché quella sezione possa essere attraversata dal carico che percorre l'itinerario⁵.

In figura 13.8a, è rappresentata la costruzione grafica del vettore N che porta il carico verticale F lungo il percorso di discesa, inclinato di θ rispetto all'orizzontale. In termini analitici risulta:

$$N = \frac{F}{\sin\theta} \tag{13.3}$$

Come mostra graficamente la figura 13.8b, l'intensità di N cresce dunque sino all'infinito al tendere di θ a zero.

È immediato dedurre⁶ che i carichi, avendo possibilità di scelta⁷, alla ricerca degli itinerari meno impegnativi (in termini di energia di deformazione) per raggiungere la loro meta, preferiscono i percorsi che si discostano meno dalla loro stessa direzione.

Con riguardo, infine, al segno di N, si riconosce immediatamente che lo sforzo normale è di compressione o di trazione⁸, a seconda che il suo verso sia concorde o discorde rispetto al verso di avanzamento lungo il percorso del carico (Fig. 13.4).

In generale un itinerario è di compressione quando il vettore lo percorre avanzando, mentre è di trazione quando lo percorre retrocedendo In campo gravitazionale, quando il carico è verticale e diretto verso il basso, i percorsi di compressione sono di discesa, mentre quelli di trazione sono di risalita.

In questa ottica si può affermare che sino alla seconda metà del secolo XIX l'architettura strutturale è stata disegnata quasi esclusivamente da itinerari di discesa dei carichi.

13.3.5 Il percorso del carico con deviazioni

In architettura è inevitabile che i percorsi dei carichi debbano essere concepiti, in sede di progetto, con deviazioni. Esse devono essere peraltro conformi alle esigenze funzionali, estetiche e, più in generale agli obiettivi prestazionali che sono a base dell'intervento costruttivo. Nel paragrafo 13.4, ove si prospetta la possibilità di utilizzare il LPM al momento della interpretazione della concezione del progetto, si può rilevare che l'evoluzione delle forme e delle tipologie strutturali è riconducibile, come si è già detto, alle diverse modalità di gestione degli itinerari delle spinte, a loro volta conseguenti alle deviazioni alle quali i carichi verticali sono costretti per liberare gli spazi funzionali dall'ingombro strutturale.

Un esempio elementare di percorso con deviazione, per alcuni aspetti pri-

⁵ L'itinerario deve coincidere con l'asse longitudinale dell'elemento, per l'ipotesi posta di elementi soggetti esclusivamente a sforzo normale.

⁶ Si veda il paragrafo 13.3.

⁷ Come nelle strutture iperstatiche.

⁸ Si conviene di utilizzare linee continue per i percorsi di trazione e tratteggiate per quelli di compressione.

mitivo, è rappresentato dalla muratura ad aggetto⁹. È tuttavia preferibile assumere la capriata triangolare (figure 13.9 e 13.10) come struttura emblematica della più semplice concezione di percorso deviato di un carico verticale.



Fig. 13.9 - La capriata triangolare

Prima di tracciare il percorso dei carichi e delle spinte è necessario individuare il sistema equilibrato dei carichi¹⁰ applicato alla capriata. Uno schema semplificato è quello di figura 13.9a. Il carico verticale Q è quello proveniente dal tetto¹¹, mentre il carico C rappresenta l'aliquota del peso proprio della ca-

⁹ Si veda il paragrafo 13.4.

¹⁰ Si veda il paragrafo 13.3.6.

¹¹ Si ricordi l'ipotesi di carichi concentrati, applicati esclusivamente ai nodi. Per una più verosimile simulazione della situazione reale si dovrebbero poi analizzare a parte gli effetti locali, rappresentati dal comportamento a trave degli spioventi, inevitabile per concentrare nei nodi i carichi distribuiti sulle falde.

tena portata dal "monaco" SB. Il carico C (Fig. 13.9b) risale lungo il tratto $B \rightarrow S$. Nel nodo S, al vertice della capriata, risulta pertanto applicato il carico totale:

$$2F = Q + C \tag{13.4}$$

2F si divide in due parti uguali. La stazione di partenza è unica, in S. Le stazioni di arrivo sono due: E ed E' (entro i piedritti). I due carichi F, dopo la deviazione nel nodo in chiave, S, si separano e scendono ognuno lungo uno spiovente, $S \rightarrow A$ ed $S' \rightarrow A'$. In A ed A', il percorso dei carichi F subisce un'ulteriore deviazione, ritornando verticale, per entrare nei sottostanti piedritti, $A \rightarrow E$ ed $A' \rightarrow E'$.



Fig. 13.10 - Dettaglio del nodo di chiave della capriata triangolare di figura 13.9

Le deviazioni avvengono pertanto in *S*, *S'*, *A* ed *A'*. In figura 13.10 è rappresentato un dettaglio del nodo di deviazione di chiave. Il vettore, per poter deviare dell'angolo δ in modo da introdursi nel percorso obliquo dello spiovente, deve imprimere una spinta *H*. Per ragioni di equilibrio¹² *H* deve essere orizzontale. *2F*, come si è detto, si divide in due parti uguali: la simmetria del sistema assicura l'equilibrio delle spinte *H*. L'intensità delle spinte in *S*, *S'*, *A* ed *A'* è identica.

Lungo gli spioventi, $(S \rightarrow A \text{ ed } S' \rightarrow A')$, scende, dunque, sia la metà del carico applicato dal tetto, sia la metà del carico applicato dal monaco, in chiave.

I percorsi delle spinte sono orizzontali. Le due spinte H, impresse in S, risultano, secondo il modello schematico di figura, applicate nello stesso punto, nel quale degenera, dunque, il loro percorso di compressione (si fanno equili-

¹² Si veda il paragrafo 13.3.6

brio avanzando di un tratto infinitesimo, l'una verso l'altra). Le spinte H impresse in A ed A', invece, si fanno equilibrio retrocedendo entro la catena, lungo il percorso $A \rightarrow A'$ (itinerario di trazione).

Si apprezzi la circostanza che, sempre grazie alla simmetria del sistema, le spinte antagoniste H possano trovare mutuo equilibrio percorrendo itinerari orizzontali, senza alcuna deviazione; altrimenti anch'esse, per deviare, dovrebbero imprimere spinte, questa volta verticali, con evidente complicazione della stessa architettura strutturale della capriata.

Si è in questa sede limitata l'attenzione alla sola analisi qualitativa del più semplice caso di itinerario con deviazione.

Qualsiasi struttura, per quanto complessa, può ricondursi tuttavia ad un sistema di percorsi deviati di carichi verticali e di spinte orizzontali.

Criteri semplici, anche grafici, per una valutazione anche quantitativa delle forze in gioco sono illustrati nel successivo paragrafo.

13.3.6 Aspetti di metodo

In figura 13.11a, è rappresentato il corpo strutturale composto da una trave di fondazione di due pilastri mentre in figura 13.11b la condizione di equilibrio fra i due carichi verticali uguali, N_c , e la reazione del terreno¹³ è rappresentata su un classico schema lineare di trave.

Con il caso di figura 13.11 si propone di illustrare quanto enunciato, che evidentemente ha validità generale.

In generale, condizione necessaria ai fini dell'equilibrio è che ad ogni punto S, al quale sia applicata una forza F, corrisponda uno o più punti $(E_1, E_2, E_3, ...)$, ai quali siano applicate forze $(F_1, F_2, F_3, ...)$, tali che il loro vettore risultante abbia la medesima intensità e direzione di F, ma verso opposto

Nell'esempio di figura, se si considera la sola parte di struttura costituita dallo sbalzo, sino all'asse del pilastro, il nodo *S* coincide con l'intersezione fra tale asse ed il corrente orizzontale superiore della trave; il carico *F* discendente dal pilastro è pari alla risultante delle reazioni del suolo, nel suddetto tratto di trave; le F_i sono i valori risultanti dei carichi distribuiti sui tronchi di lunghezza Δx , concentrati nei centri E_i delle corrispondenti superfici parziali di contatto con il terreno.

La condizione enunciata non implica che F ed il vettore risultante delle F_i abbiano la stessa retta d'azione. Essa, di conseguenza, rappresenta una condizione necessaria ma non sufficiente ad assicurare l'equilibrio completo della struttura. Ed infatti la figura mostra che la risultante delle reazioni del terreno è parallela al carico totale F, ma fra le due rette d'azione v'è una distanza pari ad a.

In base alla suddetta condizione è sempre possibile immaginare il carico F composto, a sua volta, da tante aliquote, proprio uguali ai suddetti carichi F_{I} ,

¹³ Si assume l'ipotesi di distribuzione uniforme della reazione del terreno, q, e si tralascia di considerare il peso proprio della trave.

 F_2 , ecc., tutte applicate nel medesimo punto S. Tante aliquote, dunque, quanti sono i punti E_1 , E_2 , ecc. (Fig. 13.11d).

Generalizzando possiamo affermare che in un corpo strutturale, in equilibrio statico, ad ogni forza F_i , applicata in un punto S_i , deve corrispondere una forza F_i , uguale in modulo e direzione, ma di verso opposto, applicata in un punto differente, E_i .



Fig. 13.11 - Esempio di una trave di fondazione

Si potrebbe anche affermare che, in una struttura in equilibrio, ogni forza (F_i) entra in corrispondenza del punto di applicazione S_i ed esce in E_i . Oltre la suddetta stazione di arrivo, E_i , il carico entra nella contigua struttura, che è proprio quella che vincola la precedente in E_i , reagendo con una forza F_i , u-guale e contraria. È la reazione F_2 , verso l'alto, che in figura 13.12a è contrassegnata con (**). Nel caso in esame la contigua struttura è rappresentata dal terreno di fondazione.

In questa ottica una struttura rappresenta un mezzo che, durante la vita utile dell'opera, rende possibile ad ogni forza F_i di traslare al suo interno, dal punto di introduzione (o di *Start* del suo itinerario) S_i , al punto di uscita (o di *End* del suo itinerario), E_i . Il termine traslazione appare appropriato se si considera che la forza conserva¹⁴, nella stazione di uscita, la stessa intensità, direzione e verso che aveva nella stazione di entrata.

Il modello dell'itinerario di un carico F (che in questo caso si conviene di ritenere, per comodità di esposizione, verticale) è una linea continua fra S ed E, lungo la quale agisce esclusivamente uno sforzo normale N (di compressione o di trazione), di intensità e direzione variabili, ma sempre tali da soddisfare la seguente condizione: indicato con N_i il vettore sforzo normale caratteristico della sezione di ingresso all'i-esimo tratto, la condizione necessaria e sufficiente perché l'intero percorso possa definirsi itinerario di F, è che sia sempre uguale ad F la proiezione ortogonale di N_i nella direzione del carico F.

L'effetto di tale definizione è che lungo il suo itinerario il carico trasportato trasla: conserva, cioè, verso intensità e direzione.

In figura 13.12b, scelta come scala delle forze quella che assume il braccio z a misura del carico itinerante F_2^{15} , si mostra graficamente che lungo i tratti $S \rightarrow A$, $A \rightarrow B$, $B \rightarrow E_2$, per definizione di percorso del carico, i vettori $N_{S \rightarrow A}$, $N_{A \rightarrow B}$, $N_{B \rightarrow E_2}$ sono misurati (nella suddetta scala) dalla lunghezza, rispettivamente, di ciascuno dei tratti, SA, AB, BE_2 .

Il fatto che un modello di LP $(S \rightarrow E^{16})$ risulti effettivamente itinerario di un carico verticale *F*, dunque, rappresenta anche un'implicita verifica della condizione di equilibrio alla traslazione verticale, la quale tuttavia non è sufficiente ad assicurare l'equilibrio globale.

Continuando a ricercare la verifica completa delle condizioni di equilibrio con il LPM, si può dire, sempre con riferimento alla figura 13.12a, che il vettore (che porta il carico itinerante F_2) lungo il suo percorso deve operare tante deviazioni quanti sono i nodi *S*, *A*, *B* ed E_2 . Ogni deviazione, come quella del nodo *B* (Fig. 13.12c), è possibile solo se il vettore imprime alla restante parte della struttura una spinta, e la restante parte della struttura reagisce con una spinta uguale e contraria (la H_B della figura 13.12c).

¹⁴ Si vedano i carichi richiamati con (*) in figura 13.12a, lungo tutti i tratti del percorso, e disegnati con tratteggio, in quanto virtuali. È un modo di ricordare che la sollecitazione di sforzo normale agente sulla sezione trasversale è pari all'intensità che deve avere il vettore per portare lungo quel tratto il carico F_2 .

¹⁵ Si vedano anche i capitoli 9 e 14.

¹⁶ Come ad esempio l'itinerario $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E_2$ di figura 13.12a.



Fig. 13.12 - Percorso del carico F₂ di figura 13.11

In figura le spinte impresse sono rappresentate con frecce a segmenti¹⁷, mentre le reazioni equilibranti sono rappresentate con classiche frecce a tratto intero.

La spinta impressa dal vettore deve essere ortogonale alla direzione del carico, per definizione di percorso del carico e per ragioni di equilibrio del nodo.

Il verso della spinta è facilmente individuabile se si riconduce sistematicamente il nodo ad una convergenza di sole aste di compressione e si rende così fisicamente percepibile in quale verso premono le due aste compresse rappresentative dei percorsi di ingresso $(B' \rightarrow B)$ e di uscita $(B \rightarrow B')$ dal nodo, come rappresentato in figura 13.12d.

Pertanto se il carico itinerante è verticale, come nell'esempio di figura, le spinte sono orizzontali: si vedano H_S , H_B , in corrispondenza dei nodi di deviazione sul corrente superiore e le spinte H_A , H_{E2} , in corrispondenza dei nodi di deviazione sul corrente inferiore.

In figura 13.12d si mostra il modello di deviazione nel nodo *B*, ed il relativo triangolo di equilibrio delle forze concorrenti nel nodo. È essenziale rilevare che le due spinte H_B ed H_{E2} sono fra loro uguali solo se i triangoli di equilibrio in *B* ed E_2 sono fra loro uguali. È il caso delle figura 13.12a-b-c.

La dimostrazione grafica dell'uguaglianza dei due triangoli è proposta in figura 13.12c:

- lungo tutti i tratti il carico itinerante è sempre il medesimo, pertanto i triangoli hanno sempre uguale altezza;
- il percorso di discesa obliquo è il medesimo, per cui è sempre uguale nei due triangoli l'angolo θ;
- nei due triangoli è uguale anche l'altro angolo, α, solo se i percorsi di ingresso nel nodo B (A→B) e di uscita dal nodo E₂, sono paralleli; di conseguenza solo in questo caso sarà uguale anche il terzo angolo del triangolo, δ, che rappresenta l'angolo di deviazione che l'itinerario subisce nel nodo.

La figura fornisce una percezione immediata anche quantitativa delle forze in gioco. Naturalmente l'intensità dei vettori si può esprimere anche analiticamente, in modo molto semplice, in funzione della intensità del carico:

$$N = \frac{F}{\sin \theta}$$
è il vettore ed
$$H = F \cot \theta$$
è la spinta.
(13.4)

¹⁷ Segmenti ortogonali alla direzione della spinta. La spinta è sempre rappresentata con il verso che indica la parte di struttura contigua sulla quale è impresso uno sforzo di compressione. I segmenti verticali ricordano in qualche modo tale convenzione, simulando, di una struttura di contrasto, la disposizione dei mattoni, appunto ortogonale alla direzione della spinta, compatibile con la necessità di equilibrarla.

Il percorso $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E_2$ di figura 13.12a, disegnato assumendo il parallelismo dei percorsi di ingresso nel nodo $B(A \rightarrow B)$ e di uscita dal nodo E_2 , è solo uno dei possibili itinerari che il carico F_2 può utilizzare per raggiungere l'equilibrio in E_2 . In generale può risultare che i percorsi di ingresso nel nodo $B(A \rightarrow B)$ e di uscita dal nodo E_2 non siano paralleli (Fig. 13.12e) e pertanto risulteranno, di conseguenza, differenti le spinte nei due nodi H_B ed H_{E2} . La stessa figura 13.12e, tuttavia, dimostra nel contempo che il valore risultante delle spinte sul corrente superiore risulta sempre uguale a quello delle spinte sul corrente inferiore:

 $N_{cl,F_{2}} = N_{tl,F_{2}} \tag{13.6}$

Il fatto non sorprende, in quanto è conseguenza della circostanza che le altre forze in gioco sono solo carichi verticali (le F_2 applicate in S ed in E_2), per cui i sistemi di spinte che completano la condizione di equilibrio, assicurando anche quella alla rotazione, devono essere a loro volta in equilibrio alla traslazione orizzontale.

L'equilibrio alla rotazione è in conclusione assicurato dal sistema di reazioni alle spinte impresse dai vettori in corrispondenza dei nodi di deviazione.

Se, dunque, i vettori per deviare devono imprimere spinte alla restante parte della struttura, questa a sua volta deve reagire con forze uguali e contrarie per assicurare le condizioni globali di equilibrio alla rotazione al percorso del carico. Nell'esempio proposto, la restante parte della struttura è rappresentata dalla campata di trave di fondazione, contigua al tratto a sbalzo preso in esame (Fig. 13.11a).

Anche per le spinte, sebbene orizzontali, vale naturalmente quanto detto a proposito di un generico carico verticale F: i carichi N_{cl} devono percorrere i loro itinerari alla ricerca di carichi equilibranti uguali e contrari¹⁸.

Si può pertanto concludere che la scelta dell'itinerario dei carichi, se ci si limita al rispetto delle condizioni di equilibrio globale della struttura, è assolutamente libera, in quanto non influente su quelle condizioni.

Inversamente si può affermare che la circostanza che gli itinerari dei carichi, e delle correlative spinte, risultino equilibrati è condizione sufficiente ad assicurare l'equilibrio globale della struttura.

Una rilevante situazione che è sufficiente ad assicurare il rispetto dell'equilibrio globale della struttura per effetto della sola geometria, è la condizione che tutto il sistema di itinerari e di carichi esterni verticali risulti simmetrico rispetto ad un asse verticale. Infatti, mentre la possibilità di assimilare i percorsi ad altrettanti itinerari di carichi verticali, assicura di per sé in ogni tratto l'equilibrio alla traslazione in quella direzione, di contro la condizione di simmetria è sufficiente a garantirvi il rispetto dell'equilibrio alla traslazione orizzontale e, di conseguenza, alla rotazione globale della struttura. I sistemi di spinte applicati dai carichi alla struttura in corrispondenza dei nodi dei loro itinerari devono essere dunque autoequilibrati.

¹⁸ In una trave gli itinerari delle spinte sono rappresentati dai correnti longitudinali paralleli, superiore ed inferiore.

Rientrando nel linguaggio del LPM, ciò equivale a riconoscere che è sempre possibile il rispetto delle condizioni di equilibrio della struttura, se si identificano nei nodi dei percorsi dei carichi esterni le stazioni di partenza e di arrivo delle corrispondenti spinte applicate alla struttura.

Diversamente si può affermare che sono tuttavia possibili differenti soluzioni, anch'esse equilibrate, che prevedano stazioni di arrivo delle spinte ubicate sulla frontiera del corpo strutturale.

In questo caso, tuttavia, è condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio, che il sistema di spinte uscenti dal corpo sia autoequilibrato.

13.4 II Conceptual Design con il Load Path Method

Le figure seguenti, oltre alla 13.9 e 13.10, rappresentano esempi di applicazione ad elementi strutturali classici, della utilizzazione del LPM come strumento di interpretazione del rapporto fra forma architettonica e forma strutturale.

Si è detto che gli itinerari dei carichi e delle spinte disegnano i profili della struttura, e che la storia dell'architettura strutturale potrebbe anche ricostruirsi attraverso l'analisi dell'evoluzione della gestione costruttiva del percorso delle spinte, che i vettori imprimono nei nodi di deviazione caratterizzanti la geometria dei loro percorsi.



Fig. 13.13 - Tomba di Atreo (Micene)

13.4.1 L'aggetto in muratura

La figura 13.14 mostra che se la forma dell'aggetto in mattoni (identificata in figura nel profilo delle estremità a sbalzo) non è adeguata ai percorsi del carico, l'equilibrio è impossibile.



Fig. 13.14 - L'aggetto in muratura: condizione di assenza dell'equilibrio



Fig. 13.15 - L'aggetto in muratura: condizione non equilibrata (a) ed equilibrata (b)

Lo stesso profilo risulta possibile se si introduce un altro carico F, come indicato in figura 13.15b. La forma dell'aggetto è disegnata dalle deviazioni dei carichi, e condizionata dagli angoli di deviazione, δ .

Si noti come i percorsi orizzontali delle spinte sono quelli che possono provocare la rottura per trazione dei blocchi, mentre il concentrarsi dei percorsi di discesa dei carichi, conseguente alle deviazioni necessarie per equilibrare le spinte, ne possono provocare la rottura per compressione.

13.4.2 Dall'arco alla cupola

L'arco in muratura (Fig. 13.16), è disegnato dall'itinerario comune ai diversi carichi verticali che scendono dall'alto, ed ha dunque la funzione di deviarne il percorso, per liberare lo spazio sottostante dall'ingombro strutturale.

L'equilibrio in ogni nodo è possibile solo se vi si verifica una sorta di armonia fra le tre seguenti grandezze [6]:

- intensità del carico verticale entrante in quel nodo, F_i;
- intensità dei carichi discendenti dalla chiave, ΣF_i ;
- forma dell'arco in quel nodo.

La forma è rappresentata dalle deviazioni, δ , che devono subire i suddetti carichi per seguire il percorso tracciato dall'arco. Nel continuo, essa è rappresentata dalla correlazione fra inclinazione della tangente nel punto (che influisce sulla spinta di F_i) e curvatura locale (che influisce sulla spinta di ΣF_i).

L'equilibrio è possibile, ma solo per valori univocamente determinati delle tre suddette grandezze.

Nei casi reali il corpo strutturale è dotato di uno spessore finito. Al suo interno possono pertanto svilupparsi infiniti profili, rappresentativi di altrettanti itinerari del vettore risultante [6]. È come dire che la terza delle tre grandezze, la forma, è, entro certi limiti, una variabile che può adattarsi alla effettiva intensità dei carichi in gioco.

Da quanto precede l'architettura strutturale di un arco potrebbe definirsi come il disegno esclusivo del percorso comune a più carichi verticali: esclusivo nel senso che le spinte non lasciano tracce, se non in percorsi infinitesimi, e quindi impercettibili, degenerati nei punti rappresentativi dei nodi di deviazione¹⁹.

Una cupola (Fig. 13.17) può interpretarsi come un sistema di archi meridiani, solidarizzati mediante gli anelli disposti secondo i paralleli.

Gli archi disegnano il percorso dei carichi verticali; gli anelli il percorso delle spinte orizzontali che non riescono a trovare mutuo equilibrio nei nodi dei meridiani.

La figura 13.17 mostra che nel caso della cupola l'equilibrio fra le spinte

¹⁹ È solo un modo di interpretare il modello. Un altro modo potrebbe essere quello, del tutto opposto, di interpretare l'arco come percorso esclusivo delle spinte orizzontali alle imposte [6].

in ciascuno dei nodi degli archi meridiani è dunque questa volta, a differenza dell'arco in muratura, sempre possibile, proprio grazie alla suddetta solidarizzazione. La differenza fra le due spinte nel comportamento ad arco, $H_p(F_i)$, entra nell'anello, e vi trova equilibrio grazie alla ipotizzata simmetria assiale.



Fig. 13.16 - Percorso dei carichi in un arco in muratura



Fig. 13.17 - Percorso dei carichi in una cupola

La figura 13.17 mostra anche che la forma della cupola ha una diretta influenza sul tipo di percorso delle spinte (anelli tesi ed anelli compressi).

Giova riscontrare come sia possibile leggere l'architettura spaziale di una cupola quale espressione della gestione degli itinerari delle spinte.

13.4.3 Dalla capriata alla trave

Nel paragrafo 13.3.5 si è fatto riferimento alla capriata triangolare come esempio emblematico del caso più semplice di deviazione di un carico verticale. In una capriata triangolare la catena rappresenta il percorso delle spinte nei nodi E ed E' (Fig. 13.9) di deviazione entro i piedritti, mentre gli spioventi il percorso dei carichi verticali. Si riconosce ancora una volta il carattere invasivo dell'itinerario delle spinte, che influisce sugli aspetti estetici e funzionali dell'architettura dell'opera.

Il percorso dei carichi in una capriata palladiana, può essere analizzato secondo due approcci:

- interpretazione a capriate multiple;
- interpretazione a trave.

Con il primo approccio (Fig. 13.18) la capriata palladiana può interpretarsi come un sistema di tre capriate. Le due capriate minori, interne, sono in parte portate dalla capriata maggiore.



Fig. 13.18 - La capriata palladiana: interpretazione a capriate multiple

È come dire che, volendosi liberare lo spazio sottostante dall'ingombro strutturale che sarebbe rappresentato da un piedritto centrale, i carichi verticali F_2 ", provenienti dagli spioventi interni delle capriate minori, utilizzano il monaco della capriata maggiore per risalire al vertice ed infine ridiscendere lungo i due spioventi esterni.

L'interpretazione a trave (Fig. 13.19), invece, è interessante in quanto mostra la capriata palladiana come una sorta di preludio alla nascita di una vera e propria trave. In questo caso la capriata maggiore è l'unica capriata esistente.

Essa è tuttavia caratterizzata dalla presenza di carichi $(F_1/2)$ applicati lungo gli spioventi, e non in corrispondenza dei nodi della suddetta capriata.



Fig. 13.19 - La capriata palladiana: interpretazione a trave

L'introduzione di tali carichi entro gli spioventi impone una deviazione dell'itinerario dei vettori, che a tal fine devono imprimere spinte orizzontali. Le due spinte H_2 , per effetto della simmetria, sono uguali e contrarie. Per realizzare la possibile condizione di equilibrio si vanno reciprocamente incontro.

Non disponendo di un percorso diretto, orizzontale, sono tuttavia costrette

a dividersi ²⁰nelle due aliquote H'_2 ed H''_2 , che seguono l'itinerario dei due spioventi disponibili. Tali aliquote di spinte orizzontali sono infine costrette a deviare ulteriormente in corrispondenza delle due estremità, superiore ed inferiore, del monaco, ove imprimono spinte verticali autoequilibrate. Queste ultime, retrocedendo (dunque con un percorso di trazione), utilizzano il monaco per farsi reciprocamente equilibrio.

Alla luce della interpretazione del comportamento strutturale di una capriata palladiana, si potrebbe dire che l'evoluzione da questa alla trave sia conseguente alla costruzione di un percorso delle spinte H_2 più diretto: rettilineo ed orizzontale. Il disegno di figura 13.20 mostra in forma embrionale la comparsa di due correnti longitudinali, compresso e teso, entrambi dedicati al percorso delle spinte.



Fig. 13.20 - Dalla capriata palladiana alla trave: il percorso delle spinte H₂

In questa sorta di processo evolutivo che porta dalla capriata alla trave, risultando ora inutile il tratto superiore degli spioventi quanto meno al fine di assicurare l'itinerario a rombo delle spinte (figure 13.20 e 13.21), è possibile eliminarlo, a condizione di assicurare un percorso alternativo ai carichi F_1 applicati al vertice della capriata. La figura 13.21 ne mostra il percorso e gli itinerari trasversali di risalita.

²⁰ La misura di tali aliquote dipende dalla necessità di assicurare l'equilibrio alle spinte verticali impresse nei nodi deviazione, le quali a loro volta dipendono dalla geometria della capriata.



Fig. 13.21 - Dalla capriata palladiana alla trave: il percorso di F1

Quest'ultimo passaggio dalla capriata alla trave mostra la nascita di un itinerario del carico verticale rappresentato ora da un'alternanza di percorsi di compressione e di trazione (Fig. 13.22). Diversamente dal caso della capriata, nel quale sono riscontrabili percorsi dei carichi di sola compressione lungo gli spioventi.



Fig. 13.22 - Dalla capriata palladiana alla trave: la nascita dei correnti longitudinali

13.4.4 La trave

La trave è un elemento strutturale la cui geometria prismatica è disegnata dal percorso comune a tutte le spinte, lungo i due correnti longitudinali, paralleli ed orizzontali (Fig. 13.23).



Fig. 13.23 - La trave

Le spinte sono quelle impresse dai vettori nei nodi deviazione, lungo i loro itinerari obliqui, costituiti dall'alternarsi di discese (compressione) e risalite (trazione). La capriata d'origine mostrata nel paragrafo 13.4.3, con il moltiplicarsi dei carichi applicati e delle aste inclinate, è ormai irriconoscibile.

Come già detto in precedenza perché un modello come quello di figura 13.23 possa considerarsi rappresentativo di una regione *Beam* è necessario che le spinte sui correnti si formino a coppie, e cioè a due a due uguali e contrarie. Ciò accade se le aste di parete sono a due a due parallele. È poi anche necessario che le spinte percorrano i correnti nello stesso verso, in modo che una, avanzando, tracci un percorso di compressione e l'altra, retrocedendo, un percorso di trazione.

Nel capitolo 14 sono riportati numerosi casi di modelli che illustrano quanto detto al momento dell'analisi del comportamento locale di dettagli costruttivi.

13.4.5 Sistemi complessi

La figura 13.24 propone, a titolo di esempio, il caso di una delle travi ad arco in legno lamellare ed acciaio delle coperture delle sale della musica dell'Auditorium di Roma, progettato dall'architetto Renzo Piano²¹.

Si noti come il comportamento globale possa ricondursi alla sovrapposizione di tre diversi modelli:

²¹ Progetto esecutivo delle strutture dello Studio Vitone & Associati. Si veda anche il capitolo 18.

- l'arco-tirante;
- la trave ad arco;
- la trave reticolare.

Come precedentemente detto, il *Load Path Method* offre un'interpretazione del comportamento strutturale che rende immediatamente rilevabile la correlazione fra forma (geometria) e statica (distribuzione dei carichi e delle spinte): una correlazione particolarmente stretta nel caso dei ponti sospesi e strallati. Nel seguito si analizzeranno queste due topologie di ponti [7] nell'ipotesi che siano geometricamente simmetrici e simmetricamente caricati da azioni gravitazionali; nonostante questa ipotesi, che giova alla semplicità dell'analisi, il metodo ha, come già visto, validità del tutto generale

Come negli archi in muratura, i ponti sospesi (Fig. 13.25) sono strutture la cui capacità di resistere è assicurata dalla propria forma. I carichi gravitazionali viaggiando all'interno dell'impalcato si portano dai propri punti di applicazione verso i sospensori verticali e, all'interno di questi, con un itinerario di trazione, raggiungono il cavo di sospensione (Fig. 13.25).

Il funzionamento strutturale del cavo di sospensione è assimilabile ad un arco inverso. La correlazione fra la forma e la statica è ben messa in luce nella figura 13.26: basta osservare la corrispondenza fra la geometria dell'arco, quella del percorso dei carichi (Fig. 13.26a) e la geometria del poligono di equilibrio dei carichi (Fig. 13.26b).



Fig. 13.24 - Comportamento globale di una delle travi dell'Auditorium di Roma



Fig. 13.25 - Percorso dei carichi in un ponte sospeso



Fig. 13.26 - Il cavo di sospensione quale percorso dei carichi verticali

Il poligono di equilibrio mostra anche che, se i carichi verticali sono tutti diretti verso il basso, gli angoli di inclinazione θ_i sono tutti non maggiori di θ_i ; in termini di LPM ciò deriva dal fatto che, man mano che si passa dal pilone al centro della campata, al diminuire del carico verticale (itinerante sul medesimo percorso) deve necessariamente diminuire l'inclinazione del percorso del carico, perché resti costante la relativa spinta H (Fig. 13.26b). Sempre nella ipotesi che i carichi siano tutti rivolti verso il basso, in ogni nodo O_i deve necessariamente verificarsi che l'angolo di inclinazione del percorso del carico ΣF_j debba crescere ($\theta_i > \theta_{i+1}$). Questa circostanza dipende dal fatto che in ogni nodo O_i si introduce nell'itinerario del carico ΣF_j un nuovo carico verticale F_i ; perché ciò accada il percorso di F_i , inizialmente verticale e verso il basso, deve deviare, imprimendo, di conseguenza, alla struttura una spinta orizzontale:

$$H_i(F_i) = F_i \cot \theta_i$$

L'equilibrio è assicurato, e cioè la deviazione di F_i è possibile, se, contemporaneamente, l'itinerario del carico ΣF_j , proveniente dal centro della campata e diretto verso il pilone, a sua volta subisce in O_i una deviazione δ_i , aumentando l'angolo di inclinazione da θ_{i+1} a θ_i di una entità tale da imprimere una spinta uguale e contraria a quella impressa da F_i per introdursi nell'itinerario (Fig. 13.26c):

(13.6)

$$H_i(\sum F_j) = \sum F_j(\cot\theta_{i+1} - \cot\theta_i)$$
(13.7)

Dal mutuo equilibrio di queste due spinte nasce la possibilità che i carichi, dai loro punti di applicazione, pervengano ai piloni utilizzando esclusivamente itinerari di trazione. La relazione (13.7), infine, esprime analiticamente ciò che la figura 13.26 mostra graficamente, e cioè che il profilo del LP possibile (\equiv equilibrato) è strettamente correlato alla intensità ed alla distribuzione dei carichi F_i .

È naturalmente possibile interpretare il percorso del carico $\sum F_j$ anche come itinerario della spinta *H* (Fig. 13.27).

In questo caso il carico itinerante non varia (nel presupposto che gli F_i siano tutti verticali).

In corrispondenza di ogni nodo la traiettoria della spinta (che si immagina partire dal pilone al centro della campata) subisce una deviazione δ_i , passando da una inclinazione θ_i ad un'altra (minore) θ_{i+1} . Ciò è possibile (\equiv l'equilibrio è assicurato) in quanto la correlativa spinta verticale V_i (rivolta verso l'alto) impressa da H per deviare in O_i è contrastata dal carico F_i avente la medesima retta d'azione, uguale intensità e verso opposto.

Analogamente a quanto osservato per i ponti sospesi, nei ponti strallati i carichi verticali utilizzano l'impalcato per raggiungere la parte inferiore degli stralli, quindi, grazie ad itinerari di trazione, sia nei ponti ad arpa (Fig. 13.28) sia in quelli a ventaglio (Fig. 13.29), raggiungono i piloni per mezzo degli stralli. Al momento della introduzione negli stralli, i carichi verticali devono applicare alla struttura le spinte H_i che trovano equilibrio con le spinte applicate dagli omologhi carichi che deviano, simmetricamente rispetto al pilone, nella campata adiacente.

È pertanto evidente una differenza sostanziale rispetto ai ponti sospesi: nei ponti strallati l'impalcato ha la funzione fondamentale di offrire un percorso alle spinte impresse, alla base degli stralli, in ciascuna deviazione dei carichi verticali.

Mentre nei ponti ad arpa la costanza dell'inclinazione degli stralli comporta l'eguaglianza dei moduli delle spinte H_i impresse nella deviazione di ciascun carico alla base degli stralli, e, quindi, un incremento lineare dello sforzo assiale nell'impalcato a partire dal centro della campata verso i piloni, nei ponti a ventaglio tale incremento non è lineare in quanto le spinte H_i hanno modulo non costante a causa della differente inclinazione degli stralli (figure 13.28 e 13.29).



Fig. 13.27 - Il cavo di sospensione quale percorso della spinta

Il metodo del percorso del carico permette di comprendere graficamente un'ulteriore rilevante differenza esistente tra i ponti sospesi e strallati. In una condizione di carico verticale e simmetrica, mentre nei ponti strallati le due semi-campate sono in equilibrio in quanto le spinte impresse nelle deviazioni dei carichi trovano equilibrio mediante itinerari all'interno dell'impalcato o direttamente sulla testa del pilone (figure 13.28 e 13.29), nei ponti sospesi l'equilibrio globale è possibile soltanto grazie alla presenza dei blocchi di ancoraggio.

Questo significa anche che mentre nei ponti strallati l'equilibrio è raggiunto soltanto tramite forze attive (i carichi), nei ponti sospesi esso può essere raggiunto solo grazie alla presenza di forze passive (peso dei blocchi di ancoraggio oltre la relativa reazione del suolo).



Fig. 13.28 - Percorso dei carichi in un ponte strallato ad arpa



Fig. 13.29 - Percorso dei carichi in un ponte strallato a ventaglio